Oraux blancs - séance 2

Exercice 1. [Centrale MP 2021]

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Justifier l'existence de $d = \min\{p \in \mathbb{N} \mid M^p = 0\}$ et l'inégalité $d \leqslant n$.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer que $M^2 - I_n$ est inversible et donner son inverse.
3. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0$. Montrer que $|\mathrm{Tr} M| \leqslant n$ et étudier les cas d'égalité.
4. Reprendre les questions 2. et 3. pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution :

1. *Minimum d'un ensemble non vide de* $\mathbb{N}$.
   Comme $N^{d-1} \neq 0$, *il existe* $x_0 \in \mathbb{C}^n$ *tel que* $M^{d-1}x_0 \neq 0$ *et on montre que la famille* $(M^k x_0)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ *de cardinal* d *est libre, donc* $d \leqslant n$.
2. *Soit* $p = \lfloor d/2 \rfloor + 1$, *alors* $2p \geqslant d$ *et donc*

   $$(M^2 - I_n)\Big(-\sum_{k=0}^{p-1} M^{2k}\Big) = -M^{2p} + I_n = I_n$$

   donc $M^2 - I_n$ *est inversible d'inverse* $-\sum_{k=0}^{p-1} M^{2k}$.
3. M *est annulé par* $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = \prod_{k=1}^{4}(X - \omega^k)$ *où* $\omega = e^{\mathrm{i}2\pi/5}$, *les racines de ce polynôme sont les racines 5-è de l'unité sauf* 1. *Ce sont les valeurs propres possibles de* M, *et comme le polynôme caractéristique de* M *est scindé sur* $\mathbb{C}$, *en notant* m_k *la multiplicité éventuellement nulle de* ω^k *dans* P, *on a :*

   $$|Tr(M)| = \left|\sum_{k=1}^{4} m_k\omega^k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} m_k = \deg(\chi_M) = n$$

   Le cas d'égalité correspond au cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire (à savoir démontrer, récurrence pour faire simple) : $|\mathrm{Tr}(M)| = n$ *si et seulement si tous les termes de la somme ont même argument, si et seulement si un seul des* ω^k, $1 \leqslant k \leqslant 4$ *est effectivement valeur propre, si et seulement si* $M = \omega^k I_n$ *où* $k \in [\![1,4]\!]$.
4. *2 est formellement identique, 3 se traite en regardant* M *comme une matrice complexe et le cas d'égalité est impossible car* ω^k *n'est pas réel.*

Exercice 2. [Centrale MP 2021]
Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. On suppose que $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Soit $\phi_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\mathrm{i}tx_n} \mathrm{P}(X = x_n)$.

1. Montrer que ϕ_X est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose (dans cette question seulement) que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Exprimer $\phi_X(t)$.
3. On suppose que X possède un moment d'ordre 2. Montrer que ϕ_X est de classe $\mathscr{C}^2$. Exprimer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$ à l'aide de ϕ_X.

Solution :

1. *On calcule :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \left| e^{\mathrm{i}tx_n} \mathrm{P}(X = x_n) \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = x_n) = 1 < +\infty$$

ce qui montre d'une part la convergence absolue de la série, puis la convergence de la série, et donc la bonne définition de ϕ_X sur $\mathbb{R}$.
Mais la majoration du module du terme général étant indépendante de t, il y a aussi convergence normale de la série de fonctions de la variable t sur $\mathbb{R}$, donc continuité de ϕ_X puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto e^{\mathrm{i}tx_n} \mathrm{P}(X = x_n)$ est continue (et même $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$.

2. *On calcule en reconnaissant une série exponentielle :*

$$\phi_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\mathrm{i}tn} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = e^{\lambda(e^{\mathrm{i}t}-1)}$$

3. *X admet un moment d'ordre 2, donc aussi un moment d'ordre 1. On calcule :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| f_n'(t) \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| \mathrm{P}(X = x_n) = \mathrm{E}(|X|) < +\infty$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| f''_n(t) \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| x_n^2 \right| \mathrm{P}(X = x_n) = \mathrm{E}(X^2) < +\infty$$

ce qui montre comme à la question 1 que les séries de fonctions de termes généraux f_n et f_n' convergent simplement sur $\mathbb{R}$ et la série de fonction de terme général f''_n converge normalement sur $\mathbb{R}$. Le théorème de dérivation terme à terme s'applique, ϕ_X est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X''(t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 e^{\mathrm{i}tx_n} \mathrm{P}(X = x_n)$$

En particulier $\mathrm{i}\mathrm{E}(X) = \phi_X'(0)$ *donc* $\mathrm{E}(X) = -\mathrm{i}\phi_X'(0)$ *et* $-\mathrm{E}(X^2) = \phi''_X(0)$ *donc* $\mathrm{V}(X) = \phi_X'(0)^2 - \phi_X''(0)$.

Exercice 3. [Mines MP 2021]
Soient p un nombre premier, $q = (p^2 - p)(p^2 - 1)$ et $A \in M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

1. Quel est le cardinal de $GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$?
2. Montrer que $A^{q+2} = A^2$.
3. Quel est le cardinal de $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$?
4. Quel est le cardinal de $SL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$?

Solution :

1. *Il y a p^2-1 choix d'une première colonne non nulle, pour chacun de ces choix il y a p colonnes colinéaires à cette colonne donc p^2-p choix d'une colonne non colinéaire à la première.*

   Une matrice d'ordre 2 étant inversible si et seulement si ses colonnes sont non colinéaires, $\mathrm{Card}(GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})) = (p^2-1)(p^2-p) = q$.

2. *On dispose de la relation* $A^2 + \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$ *(calcul formel encore valable dans* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$*).*
   — *Si* $\det(A) \neq 0$, *alors* $A \in GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ *qui est un groupe (vérification immédiate si besoin), donc* $A^q = I_2$ *puis* $A^{q+2} = A^2$.
   — *Si* $\det(A) = \mathrm{tr}(A) = 0$, *alors* $A^2 = 0 = A^{q+2}$.
   — *Si* $\det(A) = 0$ *et* $\mathrm{tr}(A) \neq 0$. *Alors par récurrence immédiate il vient :*

   $$A^{q+2} = (-\mathrm{tr}(A))^q A^2 = \left((-\mathrm{tr}A)^{p-1}\right)^{(p+1)(p^2-p)} A^2 = A^2$$

   en utilisant le petit théorème de Fermat.
   — *En procédant comme à la question 1 en utilisant le fait que si* $\mathscr{L}$ *est libre,* $(\mathscr{L}, x)$ *est libre si et seulement si* $x \notin \mathrm{Vect}(\mathscr{L})$, *on montre que* $\mathrm{Card}(GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})) = (p^n - 1)(p^n - p) \times \cdots \times (p^n - p^{n-1})$.
   — *On montre que* $\varphi : M \mapsto (\det M, \frac{1}{\det M} M)$ *est une bijection de* $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ *vers* $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \times SL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

   On en déduit $\mathrm{Card}(SL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})) = \frac{(p^n-1)(p^n-p)\times\cdots\times(p^n-p^{n-1})}{p-1} = (p^n-1)(p^n-p)\times\cdots\times p^{n-1}$.

Exercice 4. [Centrale MP 2021]

1. Montrer qu'il existe une unique suite (H_n) de polynômes tels que :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \exp\left(xt - t^2/2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x)\,t^n$$
2. Montrer que $H_n' = H_{n-1}$ et $(n+1)H_{n+1} = XH_n - H_{n-1}$.
3. Montrer que les H_n forment une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire
$$(P,Q) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

Solution :

1. *Soient $x, t \in \mathbb{R}$, par développement en série entière il vient :*
$$e^{xt-\frac{t^2}{2}} = e^{xt}e^{-t^2/2} = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k t^k}{k!}\right)}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{2k}}{2^k k!}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k+1}t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$\underset{\text{prod. Cauchy}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}(-1)^{n-k}}{(2k)!2^{n-k}(n-k)!}\right)t^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}(-1)^{n-k}}{(2k+1)!2^{n-k}(n-k)!}\right)t^{2n+1}$$
ce qui donne l'existence en posant
$$\begin{cases} H_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{m-k}}{(2k)!2^{m-k}(m-k)!}X^{2k} & \text{si } n = 2m \text{ est pair} \\ H_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{m-k}}{(2k)!2^{m-k}(m-k)!}X^{2k+1} & \text{si } n = 2m+1 \text{ est impair}\end{cases}$$
Pour l'unicité, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient l'unicité pour tout $n \in \mathbb{N}$ des réels $H_n(x)$ par unicité du développement en série entière, puis l'unicité des polynômes H_n par propriété de $\mathbb{R}[X]$ (deux polynômes égaux en une infinité de réels sont égaux).
2. *On obtient la première relation en dérivant les expressions obtenues à la question précédente.*
On obtient la deuxième en dérivant $t \mapsto e^{xt-t^2/2}$ et la série entière (possible puisque son rayon de convergence est infini) et en invoquant l'unicité du DSE.
3. *Une intégration par parties (en dérivant $x \mapsto H_n(x)e^{-x^2/2}$ et en primitivant $x \mapsto H_m(x)$ en $x \mapsto H_{m+1}(x)$) donne (le crochet généralisé converge par croissances comparées) :*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N},\ (H_n|H_m) = (n+1)(H_{n+1}|H_{m+1})$$
En évaluant $x \mapsto e^{xt-t^2/2}$ et sa dérivée en 0 on obtient $H_0 = 1$ et $H_1 = X$. On peut alors poser $H_{-1} = 0$ et observer que cette convention permet d'étendre les relations de la question 2 à $n \in \mathbb{N}$.
Puis obtenir :
$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ (H_n|H_m) = (n+1)(H_{n+1}|H_{m+1}) \underset{\text{symétrie}}{=} (m+1)(H_{n+1}|H_{m+1})$$
si bien que si $n \neq m$, $(H_{n+1}|H_{m+1}) = 0$ puis $(H_n|H_m) = 0$, et si $n = m$, $(H_n|H_n) > 0$ par positivité stricte de l'intégration (argument de toute façon nécessaire pour justifier que l'on dispose d'un produit scalaire).

On a ainsi démontré que $\mathscr{B} = (H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une famille orthogonale pour le produit scalaire. En particulier c'est une famille libre.*

Enfin, une récurrence (immédiate) montre que $\mathrm{Vect}(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n} = \mathbb{R}_n[X]$*, si bien que tout polynôme de* $\mathbb{R}[X]$ *est combinaison linéaire de polynômes de la famille* $\mathscr{B}$ *(il appartient à* $\mathbb{R}_d[X]$ *où* d *est son degré) :* $\mathscr{B}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}[X]$.

Conclusion : $\mathscr{B}$ *est une base orthogonale de* $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5. [IMT MP/MPI 2024]
Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : XX^\top X = -I_n$.

1. Montrer que $X \in S_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer X.

Solution :

1. *On multiplie la relation à gauche par $-X^\top$ pour obtenir :*

$$X^\top = -X^\top XX^\top X \quad \text{donc} \quad X = \left(-X^\top XX^\top X\right)^\top = -X^\top XX^\top X = X^\top$$

donc X est symétrique.

2. *X est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormale : $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $X = PDP^\top$. Par ailleurs la relation de l'énoncé donne $D^3 = -I_n$, donc en notant $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ les coefficients diagonaux de D, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $d_i^3 = -1$, donc $d_i = -1$.*
Finalement $D = -I_3$ donc $X = -I_3$.

Exercice 6. [IMT MP/MPI 2024]
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}$.

1. Étudier la convergence simple de la série sur $[1, +\infty[$.
2. Étudier la convergence uniforme de la série.
3. Y a-t-il convergence uniforme de la série sur $]1, +\infty[$?

Solution :

1. *Il y a divergence grossière si $x = 1$, et si $x > 1$, on a $0 \leqslant \dfrac{1}{1+x^n} \leqslant (x^{-1})^n$ donc il y a convergence par majoration par une série géométrique convergente.*
2. *Il y a convergence normale, donc uniforme, sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ où $a > 1$, car pour tout $x \geqslant a$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1+x^n} \leqslant \dfrac{1}{1+a^n}$.*
3. *En notant $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^k}$, on a $R_n\left(e^{\frac{1}{n+1}}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc le reste de la série ne converge pas uniformément vers 0 sur $]1, +\infty[$, donc la série ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.*

Exercice 7. [IMT MP/MPI 2024]
Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-xn}}{n}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition réel D de S.
2. Calculer $S(x)$ pour tout $x \in D$.
3. Quelles sont les limites de S aux bornes de D ?
4. L'intégrale $\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Solution :

1. *Si $x < 0$ il y a divergence grossière, si $x = 0$ il y a divergence (série harmonique), si $x > 0$, le terme général est négligeable devant $\frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente à termes positifs ou nuls, donc par domination la série converge. $D = \mathbb{R}_+^*$.*
2. *On reconnaît le DSE de* $\ln(1+t)$ *avec ici $t = -e^{-x} \in]-1,1[$:*
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+infty} \frac{(e^{-x})^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-e^{-x})^n}{n} = -\ln(1-e^{-x})$$
3. *Maintenant qu'on dispose d'une expression explicite de $S(x)$, on calcule directement $S(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.*
La première peut se retrouver par double limite (il y a convergence uniforme sur $[a,+\infty[$), l'autre par minoration.
4. *De même S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on calcule*
$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$$
et
$$S(x) = -\ln(1-e^{-x}) \underset{x\to 0^+}{=} -\ln(x+O(x^2)) \underset{x\to 0^+}{=} -\ln(x) - \ln(1+O(x)) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$$
Par critère d'équivalence pour des intégrales de fonctions $\geqslant 0$, l'intégrale converge.

Exercice 8. [IMT MP/MPI 2024]
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Montrer que $\det(I_n + XX^\top) = 1 + X^\top X$.

Solution :
Si $X = 0$ le résultat est immédiat. Supposons désormais $X \neq 0$.
$A = I_n + XX^\top$ est symétrique réelle, donc diagonalisable et alors son déterminant est le produit de ses valeurs propres (avec multiplicités).
Or $I_n + XX^\top - I_n = XX^\top$ est de rang 1 (colonnes proportionnelles) donc 1 est valeur propre de multiplicité $n-1$.
Si λ est l'autre valeur propre (il ne reste qu'une seule dimension pour les autres sous-espaces propres), alors
$$\det(A) = \lambda = \mathrm{tr}(A) - n + 1 = n + \mathrm{tr}(XX^\top) - n + 1 = 1 + \mathrm{tr}(XX\top) \underset{\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)}{=} 1 + \mathrm{tr}(X^\top X) \underset{X^\top X \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R})}{=} 1 + X^\top X$$