Préparation à l'oral - Feuille n°2

Exercice 1 (CCINP 2024)

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels strictement positifs et $\ell \in]0; 1[$.

1. Montrer que si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$, alors $\sum u_n$ converge.
2. Nature de la série $\sum \frac{n!}{n^n}$?

Corrigé : Exercice 6 CCINP 2024

Exercice 2 (CCINP 2024)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 - f - 2\text{id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Établir
$$E = \text{Ker}(f + \text{id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{id})$$
 en utilisant le lemme des noyaux puis sans l'utiliser.
3. On suppose désormais E de dimension finie. Montrer

$$\text{Im}(f + \text{id}) = \text{Ker}(f - 2\text{id})$$

Corrigé : Exercice 62 CCINP 2024

Exercice 3 (CCINP 2024)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note R_X le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathbb{P}(X = n)t^n$ et D_{G_X} le domaine de définition de $G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$.

1. (a) Prouver que $R_X \geq 1$ puis justifier que $[-1; 1] \subset D_{G_X}$. Pour $t \in [-1; 1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.
(b) Soit k entier. Exprimer $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
2. (a) On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer D_{G_X} puis $G_X(t)$ pour tout $t \in D_{G_X}$.
(b) Soient X et Y indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ . Déterminer la loi de $X + Y$.

Corrigé : Exercice 110 CCINP 2024

Exercice 4 (Mines-Telecom 2024)

Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Établir
$$\det(I_n + UU^T) = 1 + U^T U$$

Corrigé : On munit $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. On note $\mathcal{C}$ la base canonique et $u \in E$ tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}} u = U$. La matrice $I_n + UU^T$ est la matrice dans la base $\mathcal{C}$ de l'application $x \in E \mapsto x + u \langle u, x \rangle$. Posant $v = u/\|u\|$, on a

$$\det(I_n + UU^\top) = \det(f) \quad \text{avec} \quad f : x \in E \mapsto x + \|u\|^2 \langle x, v \rangle v$$

et dans $\mathcal{B}$ base orthonormée de E obtenue par complétion de (v) , on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}} f = \text{diag}(1 + \|u\|^2, 1, \dots, 1)$$

On conclut

$$\boxed{\det(I_n + UU^\top) = 1 + \|u\|^2 = 1 + U^\top U}$$

Remarque : La complétion orthonormée est un résultat de cours. Mais en réalité, on pouvait aussi simplement compléter la famille (u) en base orthogonale de E .

Exercice 5 (Mines 2024)

Soit $(G, \times)$ un groupe abélien et x, y des éléments de G d'ordres respectifs a et b entiers premiers entre eux. Montrer que $o(xy) = ab$.

Corrigé : Si $a = 1$ ou $b = 1$ ce qui signifie $x = e$ ou $y = e$, alors le résultat est trivial. On suppose $a, b \geq 2$. On a

$$(xy)^{ab} = (x^a)^b (y^b)^a = e$$

d'où $o(xy) | ab$. Soit k entier nul tel que $(xy)^k = e$. Il vient

$$(xy)^{ka} = (x^a)^k y^{ka} = y^{ka} = e \quad \text{et} \quad (xy)^{kb} = x^{kb} (y^b)^k = x^{kb} = e$$

d'où $b | ka$ et $a | kb$. D'après le lemme de Gauss, il vient $b | k$ et $a | k$ d'où $a \vee b | k$ et on a $a \vee b = ab$ puisque $a \wedge b = 1$. En particulier, on a $ab | o(xy)$ et on conclut

$$\boxed{o(xy) = ab}$$

Exercice 6 (Mines 2024)

Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ non nul. On note

$$r^+(P) = \text{Card } P^{-1}(\{0\}) \cap]0; +\infty[\quad \text{et} \quad N(P) = \text{Card } \{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$$

1. Que dire de P si $N(P) = 1$? $N(P) = 2$?
2. On suppose P non constant. Montrer

$$r^+(P) \leq r^+(P') + 1$$

3. On suppose $P(0) = 0$. Montrer $r^+(P) \leq r^+(P')$

4. Montrer $r^+(P) \leq N(P) - 1$

5. Soit n entier, des réels $0 < x_1 < \dots < x_n$ et des entiers $0 \leq p_1 < \dots < p_n$. Montrer

$$\det (x_i^{p_j})_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$$

Corrigé : 1. Si $N(P) = 1$, on a $P = \alpha X^n$ avec $\alpha \neq 0$ et si $N(P) = 2$, on a $P = \alpha X^n + \beta X^p$ avec $n > p$ et α, β non nuls d'où

$$\boxed{\text{Si } N(P) = 1, \text{ alors } r^+(P) = 0 \text{ et si } N(P) = 2, \text{ alors } r^+(P) = 1 \text{ si } \alpha\beta < 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}}$$

2. On note $r = r^+(P)$ et $x_1 < \dots < x_r$ les racines de P dans $]0; +\infty[$. D'après le théorème de Rolle appliqué à la fonction $x \mapsto P(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}$, il existe $y_i \in]x_i; x_{i+1}[$ tel que $P'(y_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; r-1 \rrbracket$. Ainsi, on a

$$0 < x_1 < y_1 < x_2 < \dots < x_{r-1} < y_{r-1} < y_r$$

On en déduit $r^+(P') \geq r - 1$, autrement dit

$$\boxed{r^+(P) \leq r^+(P') + 1}$$

3. On note $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{r-1}$ les racines de P dans $[0; +\infty[$. Toujours d'après le théorème de Rolle, il existe $y_i \in]x_{i-1}; x_i[$ pour tout $i \in \llbracket 1; r-1 \rrbracket$. Ainsi, on a

$$0 = x_0 < y_1 < x_1 < \dots < y_{r-1} < x_{r-1}$$

On en déduit $r^+(P') \geq r - 1$ et on remarque $r - 1 = r^+(P)$ d'où

$$\boxed{\text{Si } P(0) = 0, \text{ alors } r^+(P) \leq r^+(P')}$$

4. On procède par récurrence sur $N(P)$. L'inégalité est satisfaite pour $N(P) = 1$. On la suppose vraie pour tout polynôme Q jusqu'à un rang $N(Q) = p - 1$ entier non nul fixé. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $N(P) = p$. On note

$$\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\} = \{k_0, \dots, k_{p-1}\} \quad \text{avec} \quad 0 \leq k_0 < \dots < k_{p-1}$$

d'où $P = a_{k_0}X^{k_0} + \dots + a_{k_{p-1}}X^{k_{p-1}} = X^{k_0}Q$ avec $Q = a_{k_0} + \dots + a_{k_{p-1}}X^{k_{p-1}-k_0}$

On a $N(P) = N(Q)$ et $r^+(P) = r^+(Q)$

Par ailleurs, comme $Q(0) \neq 0$, on trouve

$$N(Q') = N(Q) - 1 < N(P) \quad \text{et} \quad r^+(Q) \leq r^+(Q') + 1$$

et par hypothèse de récurrence, il vient $r^+(Q') \leq N(Q') - 1$ d'où

$$r^+(P) = r^+(Q) \leq N(Q') - 1 + 1 = N(Q') = N(Q) - 1 = N(P) - 1$$

ce qui clôt la récurrence. On a donc établi

$$\boxed{r^+(P) \leq N(P) - 1}$$

5. On note $A = (x_i^{p_j})_{1 \leq i, j \leq n}$. Supposons A non inversible. On dispose de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$ où C_j désigne la j -ième colonne de A . Ainsi, notant $P = \sum_{j=1}^n \lambda_j X^{p_j}$, on a

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad P(x_i) = 0$$

d'où $r^+(P) \geq n$ et $N(P) \leq n$

ce qui contredit l'inégalité établie à la question précédente. On conclut

$$\boxed{\det (x_i^{p_j})_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0}$$

Exercice 7 (Centrale 2024)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit le *rayon spectral* d'une matrice noté ρ par

$$\forall A \in E \quad \rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$$

1. L'application ρ est-elle une norme sur E ?
2. Soit $A \in E$. Montrer que pour toute norme d'opérateur sur E , on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \rho(A) \leq \|A^p\|_{\text{op}}^{1/p}$$

3. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E et $A \in E$. Établir

$$\|A^p\|^{1/p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \rho(A)$$

Corrigé : 1. Pour N nilpotente non nulle, on a $\rho(N) = 0$ et par conséquent

Le rayon spectral n'est pas une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tels que $AX = \lambda X$. Pour p entier non nul, on a $A^p X = \lambda^p X$ d'où

$$|\lambda^p| \|X\| = \|A^p X\| \leq \|A^p\|_{\text{op}} \|X\|$$

et comme $\|X\| \neq 0$, il s'ensuit

$$|\lambda|^p \leq \|A^p\|_{\text{op}}$$

On conclut

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \rho(A) \leq \|A^p\|_{\text{op}}^{1/p}$$

3. Si $\rho(A) = 0$, alors $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$ d'où A nilpotente et le résultat est immédiat. On suppose $\rho(A) > 0$. Montrons le lemme suivant :

Lemme 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a

$$\rho(A) < 1 \implies A^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

Démonstration. On suppose $\rho(A) < 1$. On dispose de $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda I_{m_\lambda} + T_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(A)}$$

avec les T_λ triangulaires supérieures strictes. On pose

$$B = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \text{diag}(\lambda I_{m_\lambda})_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \quad \text{et} \quad N = P \text{diag}(T_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(A)} P^{-1}$$

Ainsi, on a $A = B + N$ avec B diagonalisable, N nilpotente car semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et un produit par blocs montre $BN = NB$. On note ℓ l'ordre de nilpotence de N . Pour $p \geq \ell$ entier, on obtient avec la formule du binôme

$$A^p = (B + N)^p = \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{p}{k} B^{p-k} N^k$$

On note $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec les $\lambda_i \in D(0, 1)$ puisque ce sont les valeurs propres de A . Pour $\lambda \in D(0, 1)$, on a par croissances comparées

$$\binom{p}{k} \lambda^{p-k} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} \lambda^{p-k} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p^k}{k!} \lambda^{p-k} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit

$$\binom{p}{k} D^{p-k} = \text{diag} \left(\binom{p}{k} \lambda_1^{p-k}, \dots, \binom{p}{k} \lambda_n^{p-k} \right) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0_E$$

et pour $k \in \llbracket 0; \ell - 1 \rrbracket$, l'application $M \mapsto PMP^{-1}N^k$ étant linéaire en dimension finie donc continue, il vient

$$\binom{p}{k} B^{p-k} N^k \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0_E$$

d'où

$$A^p = \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{p}{k} B^{p-k} N^k \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0_E$$

□

On munit l'espace E d'une norme d'opérateur. Soit $\varepsilon > 0$. On pose

$$A_+ = \frac{1}{\rho(A) + \varepsilon} A$$

On a
$$\rho(A_+) = \frac{\rho(A)}{\rho(A) + \varepsilon} < 1$$

et d'après le lemme
$$A_+^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

On en déduit qu'il existe un seuil N entier tel que pour $p \geq N$

$$\|A_+^p\|_{\text{op}} < 1$$

d'où
$$\rho(A) \leq \|A^p\|_{\text{op}}^{1/p} \leq \rho(A) + \varepsilon$$

ce qui prouve
$$\|A^p\|_{\text{op}}^{1/p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \rho(A)$$

Enfin, par équivalence des normes en dimension finie, on dispose de $\alpha, \beta > 0$ telles que

$$\forall M \in E \quad \alpha \|M\|_{\text{op}} \leq \|M\| \leq \beta \|M\|$$

d'où
$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \alpha^{1/p} \|A^p\|_{\text{op}}^{1/p} \leq \|A^p\|^{1/p} \leq \beta^{1/p} \|A^p\|_{\text{op}}^{1/p}$$

Par encadrement, on conclut
$$\boxed{\|A^p\|^{1/p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \rho(A)}$$

Exercice 8 (Centrale 2024)

Pour n entier non nul, on note $\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de n comptés avec multiplicité et on pose $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ et $\Lambda(n) = \sum_{d|n} \lambda(d)$.

1. Soient m, n deux entiers non nuls premiers entre eux. Établir

$$\lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n) \quad \text{et} \quad \Lambda(mn) = \Lambda(m)\Lambda(n)$$

2. Déterminer une expression simple de $\Lambda(n)$ pour n entier non nul.

3. Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, montrer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^{n^2}$$

Corrigé : 1. On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des diviseurs de n entier non nul. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Omega(n) = \sum_{p \in \mathcal{P}} v_p(n)$$

Soient m, n entiers non nuls. On a

$$\forall p \in \mathcal{P} \quad v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$$

d'où
$$\sum_{p \in \mathcal{P}} v_p(mn) = \sum_{p \in \mathcal{P}} v_p(m) + \sum_{p \in \mathcal{P}} v_p(n)$$

et par conséquent
$$\lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n)$$

On pose
$$\pi: \begin{cases} \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m \longrightarrow \mathcal{D}_{mn} \\ (d_1, d_2) \longmapsto d_1 d_2 \end{cases}$$

L'application est bien définie : si $d_1|n$ et $d_2|m$, alors $d_1 d_2|mn$. Soient $(d_1, d_2), (d'_1, d'_2)$ dans $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$ tels que $d_1 d_2 = d'_1 d'_2$. On a $d_1|d'_1 d'_2$ et $d_1 \wedge d'_2 = 1$ puisque $d_1 \wedge m = 1$ et $d'_2|m$. D'après le lemme de Gauss, il s'ensuit $d_1|d'_1$ et de même $d_2|d'_2$. Par symétrie des rôles, on obtient que d_1, d'_1 sont des entiers associés donc égaux et de même avec d_2, d'_2 d'où l'injectivité de π . Soit $d \in \mathcal{D}_{mn}$. On pose $d_1 = d \wedge n$ et $d_2 = d \wedge m$. On a $d_1|n$ et $d_2|m$ et comme $n \wedge m = 1$, alors $d_1 \wedge d_2 = 1$. De plus, on a $d_1|d$ et $d_2|d$ d'où $d_1 d_2|d$. Puis, d'après la relation de Bézout, on dispose de a, b, u, v dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$d_1 = ad + bn \quad d_2 = ud + vm$$

d'où
$$d_1 d_2 = d(aud + avm + bu) + mnbv$$

Or, on a $d|mn$ d'où $d|d_1 d_2$ et par conséquent, les entiers d et $d_1 d_2$ sont associés donc égaux. Ainsi, l'application π est surjective et on conclut à sa bijectivité. Par conséquent

$$\Lambda(mn) = \sum_{d \in \mathcal{D}_{mn}} \lambda(d) = \sum_{(d_1, d_2) \in \mathcal{D}_m \times \mathcal{D}_n} \lambda(d_1 d_2) = \sum_{(d_1, d_2) \in \mathcal{D}_m \times \mathcal{D}_n} \lambda(d_1) \lambda(d_2) = \sum_{d_1 \in \mathcal{D}_m} \lambda(d_1) \sum_{d_2 \in \mathcal{D}_n} \lambda(d_2)$$

On conclut

$$\boxed{\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad \text{avec} \quad m \wedge n = 1 \quad \lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n) \quad \text{et} \quad \Lambda(mn) = \Lambda(m)\Lambda(n)}$$

Remarque : La fonction Λ est dite *multiplicative*. La fonction λ est *complètement multiplicative* puisque la propriété établie a lieu sans la contrainte m et n premiers entre eux.

2. Soit $q \in \mathcal{P}$ et α entier non nul. On a

$$\mathcal{D}_{q^\alpha} = \{1, q, \dots, q^\alpha\} \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0; \alpha \rrbracket \quad \Omega(q^k) = k$$

puis
$$\Lambda(q^\alpha) = \sum_{d \in \mathcal{D}_{q^\alpha}} (-1)^{\Omega(d)} = \sum_{k=0}^{\alpha} (-1)^k = \frac{1 - (-1)^{\alpha+1}}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \text{ impair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit n entier non nul. Il vient

$$\Lambda(n) = \Lambda\left(\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \Lambda(p^{v_p(n)}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists p \in \mathcal{P} \mid v_p(n) \text{ impair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Lambda(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

3. On a

$$\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad |\lambda(n) z^{nk}| \leq |z|^{nk}$$

et
$$\sum_{(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2} |z|^{nk} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |z|^{nk} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{1 - |z|^n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{1 - |z|} \leq \frac{1}{(1 - |z|)^2}$$

ce qui prouve la sommabilité de la famille $(\lambda(n) z^{nk})_{(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2}$. D'après le théorème de Fubini, il vient

$$\sum_{(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2} \lambda(n) z^{nk} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda(n) z^{nk} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n) z^n}{1 - z^n}$$

La famille $(I_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ avec

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad I_m = \{(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid nk = m\}$$

est un recouvrement disjoint de $(\mathbb{N}^*)^2$. Ainsi, d'après le théorème de sommation par paquets, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2} \lambda(n) z^{nk} &= \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{(n,k) \in I_m} \lambda(n) z^{nk} \right) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{(n,k) \in I_m} \lambda(n) \right) z^m = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{n|m} \lambda(n) \right) z^m = \sum_{\ell \in \mathbb{N}^*} z^{\ell^2} \end{aligned}$$

On conclut

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n) z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^{n^2}}$$

Exercice 9 (Polytechnique 2024)

Déterminer espérance et variance du nombre de points fixes d'une permutation tirée selon une loi uniforme dans S_n .

Corrigé : On suppose $n \geq 2$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\sigma \sim \mathcal{U}_{S_n}$. Le nombre de points fixes de σ peut s'écrire $X = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{\sigma(k)=k\}}$ qui est une somme de variables de loi de Bernoulli.

On a

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \mathbb{1}_{\{\sigma(k)=k\}} \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}(\sigma(k) = k)) \quad \text{avec} \quad \mathbb{P}(\sigma(k) = k) = \frac{\text{Card} \{\sigma \in S_n \mid \sigma(k) = k\}}{\text{Card } S_n}$$

Choisir une permutation fixant $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ revient à choisir une permutation de $\llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{k\}$ ce qui équivaut à choisir une permutation de S_{n-1} . Ainsi

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{Card} \{\sigma \in S_n \mid \sigma(k) = k\} = (n-1)!$$

Par conséquent

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \mathbb{1}_{\{\sigma(k)=k\}} \sim \mathcal{B}(1/n)$$

Par linéarité de l'espérance, il vient

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\sigma(k)=k\}}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1$$

Puis, on trouve

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{\sigma(k)=k\}}\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(\mathbb{1}_{\{\sigma(k)=k\}}) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(\mathbb{1}_{\{\sigma(i)=i\}}, \mathbb{1}_{\{\sigma(j)=j\}})$$

On a

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \mathbb{V}(\mathbb{1}_{\{\sigma(k)=k\}}) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Puis, pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i < j$, il vient d'après la relation de König-Huygens

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbb{1}_{\{\sigma(i)=i\}}, \mathbb{1}_{\{\sigma(j)=j\}}) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\sigma(i)=i\}} \mathbb{1}_{\{\sigma(j)=j\}}) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\sigma(i)=i\}}) \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\sigma(j)=j\}}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\sigma(i)=i, \sigma(j)=j\}}) - \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Choisir une permutation fixant i et j avec $1 \leq i < j \leq n$ revient à choisir une permutation de $\llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i, j\}$ ce qui équivaut à choisir une permutation de S_{n-2} . Ainsi

$$\forall 1 \leq i < j \leq n \quad \text{Card} \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i, \sigma(j) = j\} = (n-2)!$$

d'où
$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} + 2 \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{n-1}{n} \end{aligned}$$

On conclut
$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 1}$$

Remarque : Si $n = 1$, on a $X = 1$ d'où $\mathbb{V}(X) = 0$.

Exercice 10 (Polytechnique 2024)

Trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n}{2^k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé : Soit n entier non nul. On pose

$$\forall t > 0 \quad f(t) = \frac{t^n}{2^t} = e^{\varphi(t)} \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = n \ln(t) - t \ln(2)$$

On a $f \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'où $f \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\sum f(k)$ converge d'après le critère de d'Alembert. La fonction φ est dérivable et on trouve

$$\forall t > 0 \quad \varphi'(t) = \frac{n}{t} - \ln(2)$$

d'où
$$\forall t > 0 \quad \varphi'(t) \leq 0 \iff t \leq \frac{n}{\ln(2)}$$

On va chercher à comparer la somme $S(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ à l'intégrale $I(n) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$. Avec le changement de variables $u = t \ln(2)$, on trouve

$$I(n) = \frac{1}{\ln(2)^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \frac{\Gamma(n+1)}{\ln(2)^{n+1}} = \frac{n!}{\ln(2)^{n+1}}$$

On note $N(n) = \left\lfloor \frac{n}{\ln(2)} \right\rfloor$. Par croissance de f sur $[0; N(n)]$, il vient

$$\forall k \leq N(n) \quad \forall t \in [k-1; k] \quad \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k)$$

d'où
$$\int_0^{N(n)} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^{N(n)} f(k)$$

et
$$\forall k \leq N(n) - 1 \quad \forall t \in [k; k+1] \quad f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt$$

d'où
$$\sum_{k=0}^{N(n)} f(k) \leq f(N(n)) + \int_0^{N(n)} f(t) dt$$

Par décroissance de f sur $[N(n)+1; +\infty[$, il vient

$$\forall k \geq N(n) + 1 \quad \forall t \in [k; k+1] \quad \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

d'où
$$\int_{N(n)+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=N(n)+1}^{+\infty} f(k)$$

et $\forall k \geq N(n) + 2 \quad \forall t \in [k-1; k] \quad f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$

d'où $\sum_{k=N(n)+1}^{+\infty} f(k) \leq f(N(n) + 1) + \int_{N(n)+1}^{+\infty} f(t) dt$

Par sommation, on obtient

$$I(n) - \int_{N(n)}^{N(n)+1} f(t) dt \leq S(n) \leq f(N(n)) + f(N(n) + 1) + I(n) - \int_{N(n)}^{N(n)+1} f(t) dt$$

Par ailleurs, on a

$$f(N(n)) \leq f\left(\frac{n}{\ln(2)}\right) \quad f(N(n) + 1) \leq f\left(\frac{n}{\ln(2)}\right) \quad \int_{N(n)}^{N(n)+1} f(t) dt \leq f\left(\frac{n}{\ln(2)}\right)$$

d'où $I(n) - f\left(\frac{n}{\ln(2)}\right) \leq S(n) \leq I(n) + 2f\left(\frac{n}{\ln(2)}\right)$

Avec l'équivalent de Stirling, on trouve

$$I(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \frac{1}{\ln(2)^{n+1}}$$

d'où $f\left(\frac{n}{\ln(2)}\right) = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{\ln(2)^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(I(n))$

On conclut

$$\boxed{S(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I(n) = \frac{n!}{\ln(2)^{n+1}}}$$