ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Préparation à l'oral - Feuille n°3

Exercice 1 (CCINP 2024)

1. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles positives non nulles à partir d'un certain rang.

   Montrer $\qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n, \sum v_n$ de même nature

2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i})\ln(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3}-1}$.

Corrigé : Exercice 7 CCPINP 2024

Exercice 2 (CCINP 2024)

Soit E un espace euclidien.

1. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ vérifiant $\langle u(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $u \circ u^* = u^* \circ u$;
   (b) $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle u(x), u(y)\rangle = \langle u^*(x), u^*(y)\rangle$;
   (c) $\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Corrigé : Exercice 63 CCPINP 2024

Exercice 3 (CCINP 2024)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathbb{P}((\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (j, k)) = \frac{(j+k)}{\mathrm{e}\, 2^{j+k} j!k!}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables sont-elles indépendantes ?
2. Prouver l'existence de $\mathbb{E}(2^{\mathrm{X}+\mathrm{Y}})$ puis la calculer.

Corrigé : Exercice 97 CCPINP 2024

Exercice 4 (Navale 2024)

Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec les matrices de rang égal à 1.

Corrigé : Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commute avec toute matrice de rang égal à 1. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ colonne non nulle. On a

$$\mathrm{A}\,(\mathrm{X}|0\ldots0) = (\mathrm{AX}|0\ldots0) \quad \text{et} \quad (\mathrm{X}|0\ldots0)\,\mathrm{A} = (a_{1,1}\mathrm{X}|a_{1,2}\mathrm{X}\ldots a_{1,n}\mathrm{X})$$

d'où $$\mathrm{AX} = a_{1,1}\mathrm{X} \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![2\,;\, n]\!] \qquad a_{1,j} = 0$$

Plus généralement, en plaçant X sur la i-ième colonne d'une matrice constituée de zéros, il vient

$$\mathrm{A}\,(0\ldots0|\mathrm{X}|0\ldots0) = (0\ldots0|\mathrm{AX}|0\ldots0) \quad \text{et} \quad (0\ldots0|\mathrm{X}|0\ldots0)\,\mathrm{A} = (a_{i,1}\mathrm{X}|a_{i,2}\mathrm{X}\ldots a_{i,n}\mathrm{X})$$

d'où
$$\mathrm{AX} = a_{i,i}\mathrm{X} \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1\,;\,n]\!] \setminus \{i\} \qquad a_{i,j} = 0$$

On en déduit $\mathrm{A} \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)$. La réciproque est immédiate et on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ commutant avec toute matrice de rang égal à 1 est } \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n).}$$

Variante : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$ et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ qui commute avec tout endomorphisme de rang égal à 1. Pour $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, on choisit F_x un supplémentaire de $\mathrm{Vect}\,(x)$ et p_x le projecteur sur $\mathrm{Vect}\,(x)$ parallèlement à F_x. On a $\mathrm{Im}\ p_x = \mathrm{Vect}\,(x)$ d'où $\mathrm{rg}\,(p_x) = 1$ d'où $u \circ p_x = p_x \circ u$ et en particulier

$$u(x) = u \circ p_x(x) = p_x \circ u(x) = p_x(u(x)) = \lambda_x x \quad \text{avec} \quad \lambda_x \in \mathbb{K}$$

Pour (x, y) famille libre de vecteurs de E, il vient

$$u(x+y) - u(x) - u(y) = 0_\mathrm{E} \iff (\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0_\mathrm{E}$$

d'où $\lambda_x = \lambda_y$. Par conséquent, notant $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de E, on obtient $u(e_i) = \lambda e_i$ pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ d'où $u \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{id}\,)$. La réciproque est immédiate.

Exercice 5 (Mines-Telecom 2024)

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par u_0 réel et $u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}$ pour n entier. Déterminer la nature de $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

Corrigé : Quitte à considérer $(u_n)_{n\geqslant 1}$, on peut supposer $u_0 > 0$. Par récurrence, on en déduit $u_n > 0$ pour tout n entier d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

ce qui prouve $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et par conséquent

$$u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0$$

D'après le critère des équivalents pour des séries à termes positifs, on conclut par critère de Riemann

$$\boxed{\text{La série } \textstyle\sum u_n \text{ diverge.}}$$

On a
$$u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n+1} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où
$$(-1)^{n+1}u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ converge d'après le théorème des séries alternées et la série $\sum \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge par comparaison et critère de Riemann. Par sommation de termes de séries convergentes, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \textstyle\sum (-1)^n u_n \text{ converge.}}$$

Exercice 6 (Mines 2024)

Soient a et b entiers naturels non nuls. Montrer que $a \wedge b = 1$ si et seulement si pour tout entier $n \geqslant ab$, il existe u, v entiers naturels tels que $au + bv = n$.

Corrigé : On montre le sens indirect. Soit $n \geqslant ab$. Il existe u, v entiers naturels tels que $au + bv = n$ et u', v' entiers naturels tels que $au' + bv' = n + 1$ d'où

$$a(u' - u) + b(v' - v) = 1$$

D'après le théorème de Bézout, il s'ensuit que $a \wedge b = 1$. Puis, on suppose $a \wedge b = 1$ et on pose

$$\varphi \colon \begin{cases} [\![0\,;\, b-1]\!] \longrightarrow \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \\ \quad k \qquad \longmapsto \overline{n - ak} \end{cases}$$

Soit $(k, \ell) \in [\![0\,;\, b-1]\!]^2$. On a

$$\varphi(k) = \varphi(\ell) \iff \overline{n - ak} = \overline{n - a\ell} \iff \overline{a(\ell - k)} = \bar{0} \iff b | a(\ell - k)$$

Comme $a \wedge b = 1$, il vient d'après le lemme de Gauss $b | (\ell - k)$ or on a $\ell - k \in [\![-(b-1)\,;\, b-1]\!]$ d'où $\ell - k = 0$, c'est-à-dire $\ell = k$. Ainsi, l'application φ est injective entre deux ensembles de même cardinal et elle réalise donc une bijection de $[\![0\,;\, b-1]\!]$ sur $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$. Par conséquent, on dispose de $u \in [\![0\,;\, b-1]\!]$ tel que $\varphi(u) = \bar{0}$. On en déduit qu'il exist e $v \in \mathbb{Z}$ tel que $n - au = bv$. Or, on a

$$n - au \geqslant ab - au > ab - a(b-1) \geqslant a > 0$$

et il s'ensuit $bv > 0$ d'où $v > 0$. On conclut

$$\boxed{a \wedge b = 1 \iff \forall n \geqslant ab \qquad \exists (u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid au + bv = n}$$

Variante : Pour le sens direct, on peut aussi encadrer assez précisément le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^2$ qui vérifie la condition. D'après la relation de Bézout, on dispose de $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$ d'où $anu + bnv = n$. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $ax + by = n$. Il vient

$$a(nu - x) = b(y - nv)$$

D'après le lemme de Gauss, on a $a | y - nv$ d'où $y = nv + ka$ avec $k \in \mathbb{Z}$ puis $x = nu - ka$. La synthèse est immédiate et toutes les solutions sont décrites par

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad a(nu - kb) + b(nv + ka) = n$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{cases} nu - kb \geqslant 0 \\ nv + ka \geqslant 0 \end{cases} \iff -\frac{nv}{a} \leqslant k \leqslant \frac{nu}{b} \iff \left\lceil -\frac{nv}{a} \right\rceil \leqslant k \leqslant \left\lfloor \frac{nu}{b} \right\rfloor$$

Il y a donc $\mathrm{N} = \left\lfloor \frac{nu}{b} \right\rfloor - \left\lceil -\frac{nv}{a} \right\rceil + 1$ solutions à valeurs dans $\mathbb{N}^2$. On rappelle les encadrements

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \quad \text{et} \quad x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1$$

Ainsi, on a
$$\mathrm{N} \leqslant \frac{nu}{b} - \frac{nv}{a} + 1 = \frac{anu + bnv}{ab} + 1 = \frac{n}{ab} + 1$$

et
$$\mathrm{N} > \frac{nu}{b} - 1 - \left(\frac{nv}{a} + 1\right) + 1 = \frac{anu + bnv}{ab} - 1 = \frac{n}{ab} - 1$$

d'où
$$\left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor \leqslant \mathrm{N} \leqslant \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor + 1$$

On conclut
$$\boxed{\left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor \leqslant \mathrm{Card}\ \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid au + bv = n\} \leqslant \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor + 1}$$

Exercice 7 (Centrale 2024)

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de limite nulle en $\pm\infty$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On pose

$$\forall (f,x) \in \mathrm{E}\times\mathbb{R} \qquad \mathrm{T}(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|x-t|} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. (a) Rappeler le théorème de Heine.
   (b) Soit $f \in \mathrm{E}$. Montrer que f est uniformément continue.
2. Montrer $\mathrm{T} \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E})$.
3. Déterminer $\|\mathrm{T}\|_{\mathrm{op}}$.

Corrigé : 1.(a) D'après le théorème de Heine, on a

$$\boxed{\text{Une fonction continue sur un compact y est uniformément continue.}}$$

1.(b) Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |x| \geqslant \mathrm{M} \quad\Longrightarrow\quad |f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

En particulier, on en déduit que la fonction f est bornée puisqu'elle l'est sur le segment $[-\mathrm{M}\,;\mathrm{M}]$ ainsi que hors de ce segment. Puis, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |x| \geqslant \mathrm{M} \quad \text{et} \quad |y| \geqslant \mathrm{M} \quad\Longrightarrow\quad |f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(y)| \leqslant \varepsilon$$

D'après le théorème de Heine appliqué à f continue sur $[-(\mathrm{M}+1)\,;\mathrm{M}+1]$, on dispose de $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [-(\mathrm{M}+1)\,;\mathrm{M}+1]^2 \qquad |x-y| \leqslant \eta \quad\Longrightarrow\quad |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

En particulier, ceci vaut pour $(x,y) \in [-\mathrm{M}\,;\mathrm{M}]^2$. Si $x \in [-\mathrm{M}\,;\mathrm{M}]$ et $y > \mathrm{M}$, alors quitte à remplacer η par $\min(1,\eta)$, on a $\eta \leqslant 1$ et si $|x-y| \leqslant \eta$, on a donc $y \leqslant x+\eta \leqslant \mathrm{M}+1$ d'où $(x,y) \in [-(\mathrm{M}+1)\,;\mathrm{M}+1]^2$. On procède de même si $y < -\mathrm{M}$. Dans tous les cas, on a donc

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |x-y| \leqslant \eta \quad\Longrightarrow\quad |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est uniformément continue.}}$

2. Soit $f \in \mathrm{E}$ et x réel. L'application $t \mapsto \mathrm{e}^{-|x-t|}f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de changement de variables avec $u = t-x$, les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|x-t|} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|u|} f(u+x)\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature. On a

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad \left|\mathrm{e}^{-|u|} f(u+x)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-|u|}\|f\|_\infty$$

et comme l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|u|}\,\mathrm{d}u$ converge sans difficulté, il s'ensuit que $u \mapsto \mathrm{e}^{-u} f(u+x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On a donc

$$\mathrm{T}(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|u|} f(u+x)\,\mathrm{d}u$$

et on va considérer cette expression intégrale pour la suite. On pose

$$\forall (x,u) \in \mathbb{R}^2 \qquad g(x,u) = \mathrm{e}^{-|u|} f(u+x)$$

On vérifie les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.

• Pour x réel, on a $u \mapsto g(x,u)$ continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

• Pour u réel, on a $x \mapsto g(x,u)$ continue sur $\mathbb{R}$.
• **Domination :** On a

$$\forall (x,u) \in \mathbb{R}^2 \qquad |g(x,u)| \leqslant \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-|u|}$$

avec $u \mapsto \mathrm{e}^{-|u|} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. On en déduit que $\mathrm{T}(f)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour u réel, on a

$$g(x,u) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$$

et par convergence dominée, il s'ensuit

$$\mathrm{T}(f)(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$$

Par linéarité de l'intégrale car convergence, l'application T est linéaire et on a donc établi $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Par inégalité triangulaire, il vient

$$|\mathrm{T}(f)(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|u|}\|f\|_\infty \,\mathrm{d}u = \|f\|_\infty$$

d'où

$$\|\mathrm{T}(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$

On conclut

$$\boxed{\mathrm{T} \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E})}$$

3. On pose

$$\forall \alpha > 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad f_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-\alpha|t|}$$

Pour $\alpha > 0$, on trouve en utilisant la parité de l'intégrande sur un intervalle centré en zéro

$$\mathrm{T}(f_\alpha)(0) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+\alpha)|t|}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+\alpha)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+\alpha}$$

Ainsi, on a

$$\frac{1}{1+\alpha} \leqslant \|\mathrm{T}(f_\alpha)\|_\infty \leqslant \|f_\alpha\|_\infty = 1$$

Faisant tendre $\alpha \to 0$, on conclut

$$\boxed{\|\mathrm{T}\|_{\mathrm{op}} = 1}$$

Exercice 8 (Centrale 2024)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\chi_\mathrm{A} = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathrm{X}^{n-i}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A.

1. Énoncer et démontrer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}$. En déduire

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \qquad \frac{\chi_\mathrm{A}'(x)}{\chi_\mathrm{A}(x)} = \mathrm{Tr}\,((x\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1})$$

On pose

$$\forall (j,x) \in [\![0\,;\, n]\!] \times \mathbb{C} \qquad \mathrm{B}_j = \sum_{i=0}^{j} a_i \mathrm{A}^{j-i} \qquad \mathrm{Q}(x) = \sum_{j=1}^{n} x^{n-j}\mathrm{B}_{j-1}$$

2. Montrer $\quad \forall x \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{Q}(x)(x\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = \chi_\mathrm{A}(x)\mathrm{I}_n \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Q}(x)) = \chi_\mathrm{A}'(x)$

3. On pose

$$\forall k \in [\![0\,;\, n-1]\!] \qquad \mathrm{S}_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k$$

Montrer

$$\forall j \in [\![0\,;\, n-1]\!] \qquad \sum_{i=0}^{j} a_i \mathrm{S}_{j-i} = (n-j)a_j$$

Corrigé : 1. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ non constant. D'après le théorème de Gauss, on dispose de l'écriture scindé $\mathrm{P} = \alpha \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - x_i)$ avec α complexe non nul et les x_i des complexes d'où $\mathrm{P}' = \alpha \sum_{i=1}^{n} \prod_{k \in [\![1\,;\,n]\!] \smallsetminus \{i\}} (\mathrm{X} - x_k)$ et par suite

$$\boxed{\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{X} - x_i}}$$

On dispose de $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$ d'où

$$\forall x \in \mathbb{C} \qquad x\mathrm{I}_n - \mathrm{A} = \mathrm{P}(x\mathrm{I}_n - \mathrm{T})\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} x - \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & x - \lambda_n \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1}$$

$$\text{d'où} \quad \forall x \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \qquad (x\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} (x - \lambda_1)^{-1} & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & (x - \lambda_n)^{-1} \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1}$$

et on conclut $$\boxed{\forall x \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{Tr}\,((x\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - \lambda_i} = \frac{\chi'_\mathrm{A}(x)}{\chi_\mathrm{A}(x)}}$$

2. Soit $x \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}(x)(x\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) &= \sum_{j=1}^{n} x^{n-j} \left(\sum_{i=0}^{j-1} a_i \mathrm{A}^{j-1-i} \right) (x\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) \\ &= \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} a_i \left(\mathrm{A}^{j-1-i} x^{n-j+1} - \mathrm{A}^{j-i} x^{n-j} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \sum_{j=i+1}^{n} \left[\mathrm{A}^{j-1-i} x^{n-(j-1)} - \mathrm{A}^{j-i} x^{n-j} \right] \\ \mathrm{Q}(x)(x\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left[x^{n-i} \mathrm{I}_n - \mathrm{A}^{n-i} \right] = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathrm{A}^{n-i} + \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i} \right) \mathrm{I}_n \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \qquad \mathrm{Q}(x)(x\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = -\left(\chi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) - a_n \mathrm{I}_n \right) + \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i} \right) \mathrm{I}_n$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{Q}(x)(x\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = \chi_\mathrm{A}(x)\mathrm{I}_n}$$

Soit $x \in \mathrm{C} \smallsetminus \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$. On a $\qquad \mathrm{Q}(x) = (x\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1} \chi_\mathrm{A}(x) \mathrm{I}_n$

$$\text{d'où} \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Q}(x)) = \chi_\mathrm{A}(x)\, \mathrm{Tr}\,((x\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}) = \chi_\mathrm{A}(x) \frac{\chi'_\mathrm{A}(x)}{\chi_\mathrm{A}(x)} = \chi'_\mathrm{A}(x)$$

Les fonctions polynomiales donc continues $x \mapsto \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Q}(x))$ et $x \mapsto \chi'_\mathrm{A}(x)$ coïncident sur $\mathbb{C} \smallsetminus \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ dense dans $\mathbb{C}$ d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Q}(x)) = \chi'_\mathrm{A}(x)}$$

3. On a $\qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{A}^k = \mathrm{PT}^k\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$

d'où $\qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^k) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k = \mathrm{S}_k$

Ainsi $\qquad \forall j \in [\![\, 0\,;\, n \,]\!] \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}_j) = \sum_{i=0}^{j} a_i \,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^{j-i}) = \sum_{i=0}^{j} a_i \mathrm{S}_{j-i}$

Puis, pour $x \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{Q}(x)) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}_{j-1})x^{n-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}_j)x^{n-j-1} = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{j} a_i \mathrm{S}_{j-i}\right)x^{n-j-1}$$

et $\qquad \chi_{\mathrm{A}}'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)a_j x^{n-j-1}$

On en déduit $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}_j)\mathrm{X}^{n-j-1} = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{j} a_i \mathrm{S}_{j-i}\right)\mathrm{X}^{n-j-1} = \sum_{j=0}^{n-1}(n-j)a_j \mathrm{X}^{n-j-1}$

puisque la différence des deux polynômes admet une infinité de racines. Par unicité des coefficients, on conclut

$$\boxed{\forall j \in [\![\, 0\,;\, n-1 \,]\!] \qquad \sum_{i=0}^{j} a_i \mathrm{S}_{j-i} = (n-j)a_j}$$

Exercice 9 (ENS 2024)

Soit $(x_n)_n$ la suite définie par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = x_n + \displaystyle\int_{x_n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour n entier.

1. Préciser la monotonie puis le comportement asymptotique de la suite $(x_n)_n$.
2. Déterminer un équivalent simple de x_n lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. On a clairement $(x_n)_n$ croissante. Supposons qu'il existe $\ell \geqslant x_0$ tel que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. Par continuité, il vient $\ell = \ell + \displaystyle\int_{\ell}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ ce qui est absurde puisque $\displaystyle\int_{\ell}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t > 0$ par séparation (intégrande continue positif non nul). La suite $(x_n)_n$ est donc croissante non convergente d'où

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_n \text{ est croissante avec } x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.}$$

2. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue par morceaux sur $[\,0\,; +\infty\,[$ avec $\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où son intégrabilité en $+\infty$. Soit $x > 0$. Les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ et $t \mapsto -\dfrac{1}{2t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et le crochet $\left[-\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t}\right]_x^{+\infty}$ est fini. Ainsi, en intégrant par parties, il vient

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t$$

On a $\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-t^2})$ d'où, par intégration de relation de comparaison (avec une fonction de référence positive), on obtient

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)$$

Ainsi
$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$$

Soit n entier. On a
$$x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} x_n + \frac{\mathrm{e}^{-x_n^2}}{2x_n}(1+\mathrm{o}(1))$$

puis
$$x_{n+1}^2 \underset{n\to+\infty}{=} x_n^2 + \mathrm{e}^{-x_n^2}(1+\mathrm{o}(1)) + \frac{\mathrm{e}^{-2x_n^2}}{4x_n^2}(1+\mathrm{o}(1))^2 = x_n^2 + \mathrm{e}^{-x_n^2} + \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-x_n^2})$$

d'où
$$\mathrm{e}^{x_{n+1}^2} \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(x_n^2 + \mathrm{e}^{-x_n^2} + \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-x_n^2})\right) = \mathrm{e}^{x_n^2}\left(1 + \mathrm{e}^{-x_n^2} + \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-x_n^2})\right) = \mathrm{e}^{x_n^2} + 1 + \mathrm{o}(1)$$

et on obtient
$$\mathrm{e}^{x_{n+1}^2} - \mathrm{e}^{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$$

D'après le théorème de Césaro, il vient
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\mathrm{e}^{x_{k+1}^2} - \mathrm{e}^{x_k^2}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

d'où
$$\mathrm{e}^{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{=} n(1+\mathrm{o}(1))$$

puis
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{\ln(n) + \ln(1+\mathrm{o}(1))} = \sqrt{\ln(n) + \mathrm{o}(\ln(n))}$$

On conclut
$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\ln(n)}}$$

Exercice 10 (ENS 2024)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires réelles discrètes dans L^1 et telles que, pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$

$$\forall t > 0 \qquad \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_k}) \leqslant \mathrm{e}^{\sigma^2 t^2}$$

avec $\sigma > 0$. Montrer
$$\mathbb{E}\left(\underset{k\in[\![1\,;\, n]\!]}{\mathrm{Max}} \mathrm{X}_k\right) \leqslant 2\sigma\sqrt{\ln(n))}$$

Corrigé : On note $\mathrm{M}_n = \underset{k\in[\![1\,;\, n]\!]}{\mathrm{Max}} \mathrm{X}_k$. On a $|\mathrm{M}_n| \leqslant \sum_{i=1}^n |\mathrm{X}_i|$ ce qui prouve $\mathrm{M}_n \in \mathrm{L}^1$. Soit $t > 0$. D'après l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe dérivable exp, il vient

$$\exp\left(t\mathbb{E}(\mathrm{M}_n)\right) \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{M}_n})$$

Par croissance de $u \mapsto \mathrm{e}^{tu}$, on a $\mathrm{e}^{t\mathrm{M}_n} = \underset{k\in[\![1\,;\, n]\!]}{\mathrm{Max}} \mathrm{e}^{t\mathrm{X}_k}$ et par positivité $\underset{k\in[\![1\,;\, n]\!]}{\mathrm{Max}} \mathrm{e}^{t\mathrm{X}_k} \leqslant \sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{t\mathrm{X}_k}$. Ainsi

$$\exp\left(t\mathbb{E}(\mathrm{M}_n)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}_k}) = n\mathrm{e}^{\sigma^2 t^2}$$

d'où
$$\mathbb{E}(\mathrm{M}_n) \leqslant \frac{\ln(n)}{t} + \sigma^2 t$$

Après étude de fonction, on trouve
$$\operatorname*{Sup}_{t>0}\left(\frac{\ln(n)}{t} + \sigma^2 t\right) = 2\sigma\sqrt{\ln(n)}$$

On conclut
$$\boxed{\mathbb{E}\left(\operatorname*{Max}_{k\in[\![1\,;\,n]\!]} \mathrm{X}_k\right) \leqslant 2\sigma\sqrt{\ln(n))}}$$