ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Préparation à l'oral - Feuille n°5

Exercice 1 (CCINP 2024)

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev normés.

1. Pour $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (P1) $f \in \mathscr{C}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$;
   (P2) f est continue en 0_{E} ;
   (P3) $\exists k > 0 \quad | \quad \forall x \in \mathrm{E} \qquad \|f(x)\|_{\mathrm{F}} \leqslant k\|x\|_{\mathrm{E}}$.
2. Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

   Montrer que φ est linéaire et continue.

Exercice 2 (CCINP 2024)

Soit p projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur le plan P le plan d'équation $x + y + z = 0$ parallèlement à la droite D d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier $$\mathbb{R}^3 = \mathrm{P} \oplus \mathrm{D}$$
2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 3 (CCINP 2024)

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver

$$p \wedge a = 1 \quad \text{et} \quad p \wedge b = 1 \quad \Longrightarrow \quad p \wedge (ab) = 1$$

2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que pour tout $k \in [\![\,1\,;\,p-1\,]\!]$, p divise $\binom{p}{k}k!$ puis en déduire p divise $\binom{p}{k}$.
   (b) Prouver $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n^p \equiv n\ [p]$$
   (c) En déduire que pour tout entier n

$$p \text{ ne divise par } n \quad \Longrightarrow \quad n^{p-1} \equiv 1\ [p]$$

Exercice 4 (Navale 2024)

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs de limite nulle. Montrer que cette suite possède une sous-suite décroissante.

Exercice 5 (Mines 2024)

Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+2t}}}}}$$

Exercice 6 (Mines 2024)

Soit $f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{H}_f(x))\subset[\,1\,;+\infty\,[$ pour tout $x\in\mathbb{R}^n$.

1. Soit $x\in\mathbb{R}^n$. On pose
$$\forall t\in\mathbb{R}\qquad \psi(t)=f(tx)-\langle\nabla f(0),tx\rangle-\frac{t^2}{2}\|x\|^2$$
Montrer que la fonction ψ est convexe.
2. Montrer que la fonction f admet un minimum global.

Exercice 7 (Centrale 2024)

1. (a) Soit G un ensemble non vide. Rappeler les conditions sur la loi $\star$ pour que le couple $(\mathrm{G},\star)$ soit un groupe.
   (b) Rappeler la définition de la différentielle d'une application en un point. Faire le lien avec les dérivées partielles dans le cas $\mathscr{C}^1$.

   Soit $\star$ une loi de groupe sur $\mathbb{R}$ de neutre e.
   On suppose que l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x\star y$ est de classe $\mathscr{C}^1$.
2. Montrer $$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\qquad \partial_2 f(x\star y,e)=\partial_2 f(x,y)\partial_2 f(y,e)$$
   En déduire $$\forall y\in\mathbb{R}\qquad \partial_2 f(y,e)>0$$
3. Montrer qu'il existe un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme φ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ tel que
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\qquad \varphi(x\star y)=\varphi(x)+\varphi(y)$$

Exercice 8 (Centrale 2024)

1. Énoncer et démontrer le théorème des bornes atteintes.
   Soit C une partie convexe compacte non vide d'un espace euclidien.
2. Soit $x\in\mathrm{E}$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique vecteur $p(x)\in\mathrm{C}$ tel que $\mathrm{d}(x,\mathrm{C})=\|x-p(x)\|$.
   (b) Soit $a\in\mathrm{C}$. Montrer
$$a=p(x)\iff\forall y\in\mathrm{C}\qquad\langle x-a,y-a\rangle\leqslant 0$$
3. Montrer que l'application p précédemment définie est continue.

Exercice 9 (Polytechnique 2024)

Soient v_1, …, v_n des vecteurs unitaires d'un espace euclidien E. Montrer qu'il existe un n-uplet $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n$ tel que
$$\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_k v_k\|\leqslant\sqrt{n}$$