

Préparation à l'oral - Feuille n°6

Exercice 1 (CCINP 2024)

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de A .
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En déduire que l'ensemble des matrices commutant avec A est $\text{Vect}(I_2, A)$.

Exercice 2 (CCINP 2024)

Soit n entier avec $n \geq 2$. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

1. On suppose $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Déterminer le module et un argument de $z^k - 1$.
2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

Exercice 3 (CCINP 2024)

On admet que pour $x \in]-1; 1[$ et q entier la série $\sum_{k \geq q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge avec

$$\forall x \in]-1; 1[\quad \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $p \in]0; 1[$ et X, Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \mathbb{P}(X = k, Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y .
(b) Prouver que $1 + Y$ suit une loi géométrique.
(c) Déterminer l'espérance de Y .
3. Déterminer la loi de X .

Exercice 4 (Navale 2024)

Soit $x > 0$. Montrer

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(xt) dt > 0$$

Exercice 5 (Mines 2024)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et m entier non nul. On considère le système différentiel (S) : $X^{(m)} = AX$ d'inconnue $X \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si toutes les solutions de (S) sont polynomiales.

Exercice 6 (Mines 2024)

Soient des réels $0 < a_0 < \dots < a_n$ et des polynômes $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = (X - 1)P$.

1. Soit $p \geq 2$ entier et $z_1, \dots, z_p$ des complexes non nuls tels que $\left| \sum_{i=1}^p z_i \right| = \sum_{i=1}^p |z_i|$. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, il existe $\lambda_k > 0$ tel que $z_k = \lambda_k z_1$.
2. Établir $\forall z \in \mathbb{C} \quad |Q(z)| \geq Q(|z|)$
3. Montrer que les racines de P sont de module < 1 .

Exercice 7 (Centrale 2024)

On note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que M et M^{-1} sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1. Montrer $GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) : |\det M| = 1\}$
2. Soit d entier non nul et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^d = I_n$. On pose $A = \frac{M - I_n}{3}$. Étudier la convergence de la suite $(A^k)_k$.
3. Montrer qu'il existe un entier K_n majorant le cardinal des sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 8 (X 2024)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn. Que dire d'une partie A de E à la fois ouverte et fermée ?

Exercice 9 (ENS 2024)

On pose $\forall x > 0 \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

On pourra utiliser les égalités $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(1) = 1$.

1. Montrer que pour k entier non nul, on a

$$\Gamma(k) = (k-1)! \quad \text{et} \quad \Gamma(k+1/2) \leq k!$$

2. Soit $\sigma > 0$ et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble discret telle que

$$\forall t \geq 0 \quad \mathbb{P}(|X| > t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

Montrer $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{E}(|X|^k) \leq (2\sigma^2)^{k/2} k \Gamma(k/2)$

3. On suppose de plus $\mathbb{E}(X) = 0$. Montrer

$$\forall s > 0 \quad \mathbb{E}(e^{sX}) \leq e^{4\sigma^2 s^2}$$