ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Préparation à l'oral python - Feuille n°1

Exercice 1 (Centrale 2021)

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique χ_A est scindé. On pose $\mathrm{P} = \dfrac{\chi_\mathrm{A}}{\chi_\mathrm{A} \wedge \chi'_\mathrm{A}}$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A. On définit enfin une suite matrices par

$$\mathrm{A}_0 = \mathrm{A} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{A}_{k+1} = \mathrm{A}_k - \mathrm{P}(\mathrm{A}_k)\mathrm{P}'(\mathrm{A}_k)^{-1}$$

1. Montrer que $\mathrm{P} = \prod\limits_{i=1}^{r} (\mathrm{X} - \lambda_i)$ et que $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ est nilpotente.
2. On pose $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Soit U une matrice de $\mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ à coefficients dans $]\,0\,;1\,[$ choisie aléatoirement et $\mathrm{A} = \mathrm{UBU}^{-1}$.
   (a) Calculer P et P′ manuellement.
   (b) Avec l'outil informatique, calculer les A_k pour $k \in [\![\,0\,;\,4\,]\!]$. On pose $\mathrm{D} = \mathrm{A}_4$ et $\mathrm{N} = \mathrm{A} - \mathrm{D}$. Calculer N, N^2, N^3, ND et DN. Qu'observe-t-on ?
3. On revient au cas général. Vérifier que $\mathbb{K}[\mathrm{A}]$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et montrer que $\mathbb{K}[\mathrm{A}] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
4. Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{P}'(\mathrm{M})$ soit inversible. Montrer qu'il existe une matrice $\mathrm{M}_1 \in \mathbb{K}[\mathrm{M}]$ telle que
$$\mathrm{Q}\left(\mathrm{M} - \mathrm{P}(\mathrm{M})\mathrm{P}'(\mathrm{M})^{-1}\right) = \mathrm{Q}(\mathrm{M}) - \mathrm{P}(\mathrm{M})\mathrm{P}'(\mathrm{M})^{-1}\mathrm{Q}'(\mathrm{M}) + \left(\mathrm{P}(\mathrm{M})\mathrm{P}'(\mathrm{M})^{-1}\right)^2 \mathrm{M}_1$$
5. Montrer que pour tout k entier, on a $\mathrm{P}'(\mathrm{A}_k)$ inversible et qu'il existe $\mathrm{B}_k \in \mathbb{K}[\mathrm{A}]$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{A}_k) = \mathrm{P}(\mathrm{A})^{2^k}\mathrm{B}_k$.
6. En déduire qu'il existe une matrice D diagonalisable et une matrice N nilpotente telles que $\mathrm{A} = \mathrm{D} + \mathrm{N}$ et $\mathrm{DN} = \mathrm{ND}$.

Exercice 2 (Centrale 2016)

Pour n entier non nul, on pose

$$\forall x > 0 \qquad f_n(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 0$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Écrire une fonction `x(n)` d'argument n entier et qui renvoie x_n.
3. Représenter les termes de la suite $(x_n)_{n \in [\![\,1\,;\,20\,]\!]}$. Que peut-on conjecturer quant au comportement asymptotique de la suite $(x_n)_n$?
4. Prouver que $(x_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
5. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de x_n pour $n \to +\infty$.
6. Poursuivre ce développement.

Exercice 3 (Centrale 2021)

On considère un pion placé initialement en 0 sur l'axe des entiers naturels. Celui-ci ne peut se déplacer que strictement à droite. On note Y_i la variable aléatoire qui mesure le déplacement réalisé à la i-ème étape. La suite $(\mathrm{Y}_i)_{i\geqslant 1}$ est supposée constituée de variables i.i.d. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i$ pour tout n entier et on pose

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \qquad f_i = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = i) \quad \text{et} \quad \forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i t^i$$

On définit l'événement E_k par « Le pion atteint la case k » et on pose $u_k = \mathbb{P}(\mathrm{E}_k)$ pour k entier. On a $u_0 = 1$.

1. On suppose que $\mathrm{Y}_1 - 1 \sim \mathscr{B}(p)$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$.
   (a) Écrire une fonction `atteint(k)` d'argument `k` entier qui réalise une simulation du déplacement du pion et renvoie `True` si la case k est atteinte et `False` sinon.
   (b) Écrire une fonction `PE(k)` d'argument `k` entier qui renvoie une approximation de $\mathbb{P}(\mathrm{E}_k)$. La comparer à $\dfrac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)}$ pour différentes valeurs de k.
   (c) Reprendre les questions précédentes avec $\mathrm{Y}_1 \sim \mathscr{G}(p)$.
2. Soit k entier. Exprimer l'événement E_k à l'aide des variables S_n.
3. Soit k entier et j entier non nul. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\})$.
   En déduire une expression sommatoire de $\mathbb{P}(\mathrm{E}_k)$.
4. Pour t réel, on pose $u(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k t^k$.
   Montrer que u est défini sur $[\,0\,;1\,[$ puis établir
$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \frac{1}{1-f(t)}$$
5. En déduire les u_k si $\mathrm{Y}_1 - 1 \sim \mathscr{B}(p)$ puis si $\mathrm{Y}_1 \sim \mathscr{G}(p)$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$.
6. On suppose que Y_1 ne prend qu'un nombre fini de valeurs et que les k entiers non nuls tels que $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j) \neq 0$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que
$$u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)}$$