Préparation à l'oral python - Feuille n°1

Exercice 1 (Centrale 2021)

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique χ_{A} est scindé. On pose $\mathrm{P} = \dfrac{\chi_{\mathrm{A}}}{\chi_{\mathrm{A}} \wedge \chi'_{\mathrm{A}}}$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A. On définit enfin une suite matrices par

$$\mathrm{A}_0 = \mathrm{A} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{A}_{k+1} = \mathrm{A}_k - \mathrm{P}(\mathrm{A}_k)\mathrm{P}'(\mathrm{A}_k)^{-1}$$

1. Montrer que $\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{r} (\mathrm{X} - \lambda_i)$ et que $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ est nilpotente.
2. On pose $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Soit U une matrice de $\mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ à coefficients dans $]\,0\,;1\,[$ choisie aléatoirement et $\mathrm{A} = \mathrm{UBU}^{-1}$.
   (a) Calculer P et P′ manuellement.
   (b) Avec l'outil informatique, calculer les A_k pour $k \in [\![\, 0\,;\, 4 \,]\!]$. On pose $\mathrm{D} = \mathrm{A}_4$ et $\mathrm{N} = \mathrm{A} - \mathrm{D}$. Calculer N, N^2, N^3, ND et DN. Qu'observe-t-on ?
3. On revient au cas général. Vérifier que $\mathbb{K}[\mathrm{A}]$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et montrer que $\mathbb{K}[\mathrm{A}] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
4. Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{P}'(\mathrm{M})$ soit inversible. Montrer qu'il existe une matrice $\mathrm{M}_1 \in \mathbb{K}[\mathrm{M}]$ telle que
$$\mathrm{Q}\left(\mathrm{M} - \mathrm{P}(\mathrm{M})\mathrm{P}'(\mathrm{M})^{-1}\right) = \mathrm{Q}(\mathrm{M}) - \mathrm{P}(\mathrm{M})\mathrm{P}'(\mathrm{M})^{-1}\mathrm{Q}'(\mathrm{M}) + \left(\mathrm{P}(\mathrm{M})\mathrm{P}'(\mathrm{M})^{-1}\right)^2 \mathrm{M}_1$$
5. Montrer que pour tout k entier, on a $\mathrm{P}'(\mathrm{A}_k)$ inversible et qu'il existe $\mathrm{B}_k \in \mathbb{K}[\mathrm{A}]$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{A}_k) = \mathrm{P}(\mathrm{A})^{2^k}\mathrm{B}_k$.
6. En déduire qu'il existe une matrice D diagonalisable et une matrice N nilpotente telles que $\mathrm{A} = \mathrm{D} + \mathrm{N}$ et $\mathrm{DN} = \mathrm{ND}$.

Corrigé : 1. On a $\chi_{\mathrm{A}} = \prod_{i=1}^{r} (\mathrm{X} - \lambda_i)^{m_i}$. Par conséquent, pour $i \in [\![\, 1\,;\, r \,]\!]$, le scalaire λ_i est racine de χ'_{A} de multiplicité $m_i - 1$ et on en déduit

$$\chi_{\mathrm{A}} \wedge \chi'_{\mathrm{A}} = \prod_{i=1}^{r} (\mathrm{X} - \lambda_i)^{m_i - 1}$$

D'où $\boxed{\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{r} (\mathrm{X} - \lambda_i) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(\mathrm{A})^n = \prod_{i=1}^{r} (\mathrm{A} - \lambda_i \mathrm{I}_n)^{m_i + n - m_i} = \chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A})\mathrm{Q}(\mathrm{A}) = 0}$

2.(a) La matrice B est triangulaire et en appliquant ce qui précède, on trouve

On trouve $\boxed{\mathrm{P} = (\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} - 2) = \mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}' = 2\mathrm{X} - 3}$

2.(b) On saisit :

```
B=np.array([[1,3,6,0,0],
            [0,1,3,0,0],
            [0,0,1,0,0],
            [0,0,0,2,6],
            [0,0,0,0,2]])
I5=np.eye(5)

U=rd.rand(5,5)
A=np.dot(U,np.dot(B,alg.inv(U)))


def P(M):
    return M.dot(M)-3*M+2*I5

def dP(M):
    return 2*M-3*I5

tA=[A]
for k in range(1,5):
    Ak=tA[-1]
    tA.append(Ak-np.dot(P(Ak),alg.inv(dP(Ak))))
```

On observe $\boxed{\text{La matrice N est nilpotente et DN} = \text{ND.}}$

3. Sans difficulté, l'application $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), Q \mapsto Q(A)$ est un morphisme d'algèbres et par conséquent

$$\boxed{\mathbb{K}[A] = \operatorname{Im} \varphi \text{ est une sous-algèbre de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).}$$

On a clairement $\mathbb{K}[A] \cap GL_n(\mathbb{K})$ stable par produit et contenant I_n. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(A) \in \mathbb{K}[A] \cap GL_n(\mathbb{K})$. On a $\pi_A \wedge Q = 1$. En effet, supposons que $D = \pi_A \wedge Q \neq 1$. On a $Q = DR$ et $\pi_A = DS$ avec D non nul puisque π_A ne l'est pas donc D non constant puisque D est unitaire et $\neq 1$. On trouve

$$S(A)Q(A) = \pi_A(A)R(A) = 0$$

et comme $Q(A)$ est inversible, il s'ensuit $S(A) = 0$ avec $\deg S < \deg \pi_A$ ce qui est absurde. Par la relation de Bézout, on dispose de U, V dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $\pi_a U + QV = 1$ d'où $Q(A)V(A) = I_n$ ce qui prouve que l'inverse de $Q(A)$ est dans $\mathbb{K}[A] \cap GL_n(\mathbb{K})$. Ainsi

$$\boxed{\mathbb{K}[A] \cap GL_n(\mathbb{K}) \text{ est un sous-groupe de } GL_n(\mathbb{K}).}$$

4. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. D'après la formule de Taylor, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2 \qquad Q(x + y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} y^k Q^{(k)}(x)$$

Soit $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P'(M)^{-1} = R(M)$. On a

$$\forall x \in \mathbb{K} \qquad Q(x - P(x)R(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(-P(x)R(x)\right)^k Q^{(k)}(x)$$

d'où $$Q(X - P(X)R(X)) = Q(X) - P(X)R(X)Q'(X) + \left(P(X)R(X)\right)^2 S(X)$$

avec $$\mathrm{S(X)} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(-\mathrm{P}(x)\mathrm{R}(x)\right)^{k-2} \mathrm{Q}^{(k)}(\mathrm{X})$$

Ainsi $$\mathrm{Q(M - P(M)R(M)) = Q(M) - P(M)R(M)Q'(M) + (P(M)R(M))^2\, S(M)}$$

On conclut donc

$$\boxed{\exists \mathrm{M}_1 \in \mathbb{K}[\mathrm{M}] \quad | \quad \mathrm{Q}\left(\mathrm{M} - \mathrm{P(M)P'(M)}^{-1}\right) = \mathrm{Q(M)} - \mathrm{P(M)P'(M)}^{-1}\mathrm{Q'(M)} + \left(\mathrm{P(M)P'(M)}^{-1}\right)^2 \mathrm{M}_1}$$

5. On procède par récurrence. On a $\mathrm{P'(A)}$ inversible puisque $\pi_{\mathrm{A}} \wedge \mathrm{P'} = 1$. On applique ce qui précède avec $\mathrm{Q = P}$ et $\mathrm{M} = \mathrm{A}_k$. On obtient

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_{k+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_k) - \mathrm{P}(\mathrm{A}_k)\mathrm{P}'(\mathrm{A}_k)^{-1}\mathrm{P}'(\mathrm{A}_k) + \left(\mathrm{P}(\mathrm{A}_k)\mathrm{P}'(\mathrm{A}_k)^{-1}\right)^2 \mathrm{R}(\mathrm{A}_k) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_k)^2\mathrm{P}'(\mathrm{A}_k)^{-2}\mathrm{R}(\mathrm{A}_k)$$

Par récurrence, on a $\mathrm{A}_k \in \mathbb{K}[\mathrm{A}]$ et ainsi

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_{k+1}) = \left(\mathrm{P(A)}^{2^k}\mathrm{B}_k\right)^2 \mathrm{P}'(\mathrm{A}_k)^{-2}\mathrm{R}(\mathrm{A}_k) = \mathrm{P(A)}^{2^{k+1}}\mathrm{B}_{k+1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{B}_{k+1} \in \mathbb{K}[\mathrm{A}]$$

Puis, on a $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P'} = 1$ d'où l'existence de U et V dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{PU + P'V} = 1$. Ainsi

$$\mathrm{P}'(\mathrm{A}_k)\mathrm{V}(\mathrm{A}_k) = \mathrm{I}_n - \mathrm{P}(\mathrm{A}_k)\mathrm{U}(\mathrm{A}_k)$$

Comme $\mathrm{P(A)}$ est nilpotente, alors $\mathrm{P}(\mathrm{A}_k)$ aussi et donc $\mathrm{P}(\mathrm{A}_k)\mathrm{U}(\mathrm{A}_k)$ également et quitte à trigonaliser, on constate que $\mathrm{P}'(\mathrm{A}_k)\mathrm{V}(\mathrm{A}_k)$ est inversible d'où $\mathrm{P}'(\mathrm{A}_k)$ également. On conclut

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}'(\mathrm{A}_k) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \exists \mathrm{B}_k \in \mathbb{K}[\mathrm{A}] \mid \mathrm{P}(\mathrm{A}_k) = \mathrm{P(A)}^{2^k}\mathrm{B}_k}$$

6. Si $2^k \geqslant n$, on a $\mathrm{P}(\mathrm{A}_k) = 0$ d'où $\mathrm{A}_{k+1} = \mathrm{A}_k$, autrement dit la suite stationne en une matrice qu'on note D. On a $\mathrm{P(D)} = 0$ d'où D diagonalisable et

$$\mathrm{N = A - D} = \mathrm{A}_0 - \mathrm{A}_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} [\mathrm{A}_i - \mathrm{A}_{i+1}] = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)\mathrm{P}'(\mathrm{A}_i)^{-1}$$

qui est nilpotente comme somme de matrices nilpotentes et qui commutent. On conclut

$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{A}_k)_k \text{ stationne en D diagonalisable et telle que } \mathrm{N = A - D} \text{ nilpotente et commute avec D.}}$$

Exercice 2 (Centrale 2016)

Pour n entier non nul, on pose

$$\forall x > 0 \qquad f_n(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 0$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Écrire une fonction `x(n)` d'argument n entier et qui renvoie x_n.
3. Représenter les termes de la suite $(x_n)_{n \in [\![1\,;20]\!]}$. Que peut-on conjecturer quant au comportement asymptotique de la suite $(x_n)_n$?
4. Prouver que $(x_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
5. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de x_n pour $n \to +\infty$.
6. Poursuivre ce développement.

Corrigé : 1. On a $f_n(1) = 1 - n \neq 0$ pour $n \geqslant 2$. On suppose $n > 2$ pour la suite. Pour $x > 0$ avec $x \neq 1$, on trouve

$$f_n(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} x^k = x^n - \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 2x^n + 1}{x - 1}$$

On pose $$\forall x > 0 \qquad g_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$$

La fonction g_n est dérivable avec $g_n'(x) = (n+1)x^n - 2nx^{n-1} = x^{n-1}\left((n+1)x - 2n\right)$. On en déduit que g_n est décroissante sur $]\,0\,;1\,[$, sur $\left]1\,;\dfrac{2n}{n+1}\right]$ puis croissante sur $\left[\dfrac{2n}{n+1}\,;+\infty\right[$. Comme $g_n(1) = 1$, la fonction g_n ne s'annule pas sur $]\,0\,;1\,[$ et $\left]0\,;\dfrac{2n}{n+1}\right]$ mais comme $g_n\left(\dfrac{2n}{n+1}\right) < g_n(1) = 0$, on a un unique point d'annulation de g_n sur $\left[\dfrac{2n}{n+1}\,;+\infty\right[$ qui est donc également l'unique point d'annulation de f_n. Ainsi

$$\boxed{\text{Il existe un unique } x_n > 0 \text{ tel que } f_n(x_n) = 0.}$$

Variante : On peut aussi considérer

$$\forall x > 0 \qquad h_n(x) = \frac{f_n(x)}{x^n} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x^{n-k}}$$

qui est strictement croissante comme somme de telles fonctions. On a $h_n(1) = 1 - n < 0$ pour $n \geqslant 2$ et $h_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ d'où l'existence et unicité de $x_n > 1$ telle que $h_n(x_n) = 0$.

2. On saisit :

```
def x(n):
    return resol.fsolve(lambda x:x**n-sum([x**k for k in range(n)]),2)[0]
```

On initialise la descente à 2 pour être au-delà de l'extremum atteint en $\dfrac{2n}{n+1}$.

3. On saisit :

```
tn=range(2,15)
tx=[x(n) for n in tn]
plt.plot(tn,tx,'bo--')
plt.grid();plt.show()
```

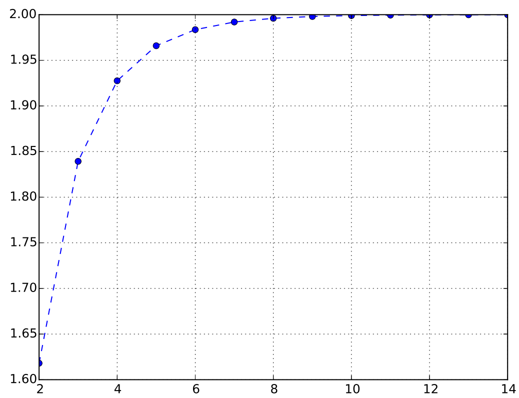

FIGURE 1 – Tracé de la suite $(x_n)_n$

On conjecture $$\boxed{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2}$$

4. Soit $n \geqslant 2$. On a $\qquad g_n(2) = 2^{n+1} - 2 \times 2^n + 1 = 1 > 0 = g_n(x_n)$

Ainsi, par croissance de stricte de g_n, il vient

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \frac{2n}{n+1} \leqslant x_n \leqslant 2$$

Par encadrement $\qquad \boxed{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2}$

5. On a

$$f_n(x_n) = 0 \iff x_n - \frac{x_n^n - 1}{x_n - 1} = 0 \iff x_n^{n+1} - 2x_n + 1 = 0 \iff x_n^n(2 - x_n) = 1$$

Avec $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$, on obtient $x_n \geqslant \dfrac{3}{2}$ pour n assez grand. Puis

$$\frac{n}{x_n^n} < n\left(\frac{2}{3}\right)^n = \mathrm{o}(1) \qquad \Longrightarrow \qquad x_n^{-n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ensuite
$$\begin{aligned} 2 - x_n &= x_n^{-n} = \exp\left[-n\ln\left(2 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\ &= \exp\left[-n\left(\ln 2 + \ln\left(1 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\right] \\ 2 - x_n &= \exp\left[-n\left(\ln 2 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = \exp\left(-n\ln 2 + \mathrm{o}(1)\right) \end{aligned}$$

Ainsi $\qquad \boxed{x_n = 2 - \dfrac{1}{2^n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)}$

6. On réinjecte le développement obtenu dans la relation vérifiée par x_n :

$$\begin{aligned} 2 - x_n &= x_n^{-n} = \exp\left[-n\ln\left(2 - \frac{1}{2^n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\right] \\ &= \exp\left[-n\left(\ln 2 + \ln\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)\right)\right] \\ 2 - x_n &= \exp\left[-n\left(\ln 2 - \frac{1}{2^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)\right] = \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{n}{2^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{n}{2^n}\right)\right) \end{aligned}$$

Ainsi $\qquad \boxed{x_n = 2 - \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{n}{2^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\dfrac{n}{2^n}\right)}$

Remarque : On peut évidemment itérer ce procédé.

Exercice 3 (Centrale 2021)

On considère un pion placé initialement en 0 sur l'axe des entiers naturels. Celui-ci ne peut se déplacer que strictement à droite. On note Y_i la variable aléatoire qui mesure le déplacement réalisé à la i-ème étape. La suite $(\mathrm{Y}_i)_{i\geqslant 1}$ est supposée constituée de variables i.i.d. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i$ pour tout n entier et on pose

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \qquad f_i = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = i) \quad \text{et} \quad \forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i t^i$$

On définit l'événement E_k par « Le pion atteint la case k » et on pose $u_k = \mathbb{P}(\mathrm{E}_k)$ pour k entier. On a $u_0 = 1$.

1. On suppose que $\mathrm{Y}_1 - 1 \sim \mathscr{B}(p)$ avec $p \in]\,0\,;1\,[$.

   (a) Écrire une fonction `atteint(k)` d'argument `k` entier qui réalise une simulation du déplacement du pion et renvoie `True` si la case k est atteinte et `False` sinon.

   (b) Écrire une fonction `PE(k)` d'argument `k` entier qui renvoie une approximation de $\mathbb{P}(\mathrm{E}_k)$. La comparer à $\dfrac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)}$ pour différentes valeurs de k.

   (c) Reprendre les questions précédentes avec $\mathrm{Y}_1 \sim \mathscr{G}(p)$.

2. Soit k entier. Exprimer l'événement E_k à l'aide des variables S_n.

3. Soit k entier et j entier non nul. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\})$.
   En déduire une expression sommatoire de $\mathbb{P}(\mathrm{E}_k)$.

4. Pour t réel, on pose $u(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k t^k$.
   Montrer que u est défini sur $[\,0\,;1\,[$ puis établir

$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \frac{1}{1 - f(t)}$$

5. En déduire les u_k si $\mathrm{Y}_1 - 1 \sim \mathscr{B}(p)$ puis si $\mathrm{Y}_1 \sim \mathscr{G}(p)$ avec $p \in]\,0\,;1\,[$.

6. On suppose que Y_1 ne prend qu'un nombre fini de valeurs et que les k entiers non nuls tels que $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j) \neq 0$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que

$$u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)}$$

Corrigé : 1.(a) On saisit :

```
p=.27

def ber(p):
    return int(rd.rand()<p)

def atteint(k):
    res=0
    while res<k:
        res+=1+ber(p)
    return res==k
```

1.(b) On saisit :

```
def PE(k):
    N=2000
    return np.mean([atteint(k) for i in range(N)])

print("Cas : Y_1-1 ~ B(p) :")
print('1/E(Y_1)=',1/(1+p))
for k in range(1,10):
    print('k=',k,'P(E_k)=',PE(k))
```

On observe :

```
Cas : Y_1-1 ~ B(p) :
1/E(Y_1)= 0.7874015748031495
k= 1 P(E_k)= 0.7166
k= 2 P(E_k)= 0.8096
k= 3 P(E_k)= 0.783
k= 4 P(E_k)= 0.7888
...
```

On conjecture $$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{E}_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)}}$$

1.(c) On saisit :

```
def atteint(k):
    res=0
    while res<k:
        res+=rd.geometric(p)
    return res==k

...

print("Cas : Y_1 ~ G(p) :")
print('1/E(Y_1)=',p)
for k in range(1,10):
    print('k=',k,'P(E_k)=',PE(k))
```

On observe :

```
Cas : Y_1 ~ G(p) :
1/E(Y_1)= 0.27
k= 1 P(E_k)= 0.265
k= 2 P(E_k)= 0.257
k= 3 P(E_k)= 0.287
...
```

On observe un comportement sensiblement identique à précédemment (on verra que c'est même plus tranché en fait).

2. Soit k entier. Pour $n < m$, on a

$$\{\mathrm{S}_n = k\} \cap \{\mathrm{S}_m = k\} \subset \left\{\sum_{i=n+1}^{m} \mathrm{Y}_i = 0\right\} = \varnothing$$

L'événement E_k est réalisé si et seulement s'il existe n entier tel que $\mathrm{S}_n = k$ et un tel n s'il existe est unique. On conclut

$$\boxed{\mathrm{E}_k = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \{\mathrm{S}_n = k\}}$$

Remarque : Si k est entier non nul, on peut écrire $\mathrm{E}_k = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} \{\mathrm{S}_n = k\}$ puisque $\mathrm{S}_0 = 0$ ce qui implique $\{\mathrm{S}_0 = k\} = \varnothing$.

3. Soit k et j entiers non nuls. On a

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} \{\mathrm{S}_n = k\} \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k, \mathrm{Y}_1 = j)$$

Si $j \geqslant k+1$, on a pour $n \geqslant 1$

$$\{\mathrm{S}_n = k, \mathrm{Y}_1 = j\} \cap \{\mathrm{Y}_1 \leqslant k, \mathrm{Y}_1 = j\} = \varnothing$$

d'où $$\forall j \geqslant k+1 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = 0$$

Si $j \leqslant k$, il vient $$\mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\sum_{i=2}^{n} \mathrm{Y}_i = k - j, \mathrm{Y}_1 = j)$$

Les variables $\sum_{i=2}^{n} \mathrm{Y}_i$ et Y_1 sont indépendantes d'où

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\sum_{i=2}^{n} \mathrm{Y}_i = k - j) \mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j)$$

La variable $\sum_{i=2}^{n} \mathrm{Y}_i$ a même loi que S_{n-1} et par suite

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j) \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{S}_{n-1} = k - j) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j) \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} \{\mathrm{S}_{n-1} = k - j\}\right)$$

Ainsi $$\boxed{\forall (k,j) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = \begin{cases} \mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j)\mathbb{P}(\mathrm{E}_{k-j}) \text{ si } j \leqslant k \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sinon} \end{cases}}$$

Par probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}_k) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{j=1}^{+\infty} \mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\})$$

Ainsi $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(\mathrm{E}_k) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j) \mathbb{P}(\mathrm{E}_{k-j})}$$

4. On a $0 \leqslant u_k \leqslant 1$ pour tout k entier. Le rayon de convergence de la série entière $\sum u_k t^k$ est donc $\geqslant 1$ ce qui prouve que la fonction u est définie sur $[\,0\,;1\,[$. Pour $t \in [\,0\,;1\,[$, on a

$$u(t) = u_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} u_{k-j} f_j\right) t^k$$

Si on pose $f_0 = 0$ par commodité, on a

$$u(t) = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} u_{k-j} f_j\right) t^k$$

La fonction f est la fonction génératrice de Y_1 donc le rayon de convergence de sa série entière est $\geqslant 1$. Ainsi, par produit de Cauchy de séries entières, on obtient

$$u(t) = 1 + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k t^k\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} f_j t^j\right) = 1 + u(t)f(t)$$

Puis, la fonction f est croissante comme somme (infinie) de telles fonctions et $f(t) \leqslant f(1) = 1$ avec

$$f(t) = f(1) \iff \sum_{j=0}^{+\infty} \underbrace{f_j(1-t^j)}_{\geqslant 0} = 0 \iff \forall j \in \mathbb{N} \qquad f_j(1-t^j) = 0$$

$$\iff \exists j \in \mathbb{N}^* \qquad 1 - t^j = 1 \iff t = 1$$

puisque les f_j sont non tous nuls. On conclut

$$\boxed{\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \frac{1}{1-f(t)}}$$

5. Si $\mathrm{Y}_1 - 1 \sim \mathscr{B}(p)$, on a

$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad f(t) = (1-p)t + pt^2$$

d'où $\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \dfrac{1}{1-(1-p)t-pt^2} = \dfrac{1}{(1-t)(1+pt)} = \dfrac{1}{1+p}\left[\dfrac{1}{1-t} + \dfrac{p}{1+pt}\right]$

Ainsi $\quad \forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \dfrac{1}{1+p}\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} t^k + p\sum_{k=0}^{+\infty}(-pt)^k\right] = \dfrac{1}{1+p}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(1+(-1)^k p^{k+1}\right)t^k$

Par unicité du développement en série entière, on conclut

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Y}_1 \sim \mathscr{B}(p), \text{ alors } u_k = \frac{1}{1+p}\left(1+(-1)^k p^{k+1}\right) \text{ pour tout } k \text{ entier.}}$$

On peut compléter la simulation faite précédemment :

```
print("Cas : Y_1-1 ~ B(p) :")
print('1/E(Y_1)=',1/(1+p))
for k in range(1,10):
    print('k=',k,'P(E_k)=',PE(k),'P(E_k)_th=',(1+(-1)**k*p**(k+1))/(1+p))
```

et on observe :

```
Cas : Y_1-1 ~ B(p) :
1/E(Y_1)= 0.7874015748031495
k= 1 P(E_k)= 0.7326 P(E_k)_th= 0.73
k= 2 P(E_k)= 0.7998 P(E_k)_th= 0.8029
k= 3 P(E_k)= 0.779 P(E_k)_th= 0.7832169999999999
...
```

On suppose $\mathrm{Y}_1 \sim \mathscr{G}(p)$. Pour $t \in [\,0\,;1\,[$, on a

$$f(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} p(1-p)^{j-1}t^j = \frac{pt}{1-(1-p)t}$$

puis

$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \frac{1}{1 - \dfrac{pt}{1-(1-p)t}} = \frac{1-(1-p)t}{1-t} = (1-(1-p)t)\sum_{k=0}^{+\infty} t^k = 1 + p\sum_{k=1}^{+\infty} t^k$$

Par unicité du développement en série entière, on conclut

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Y}_1 \sim \mathscr{G}(p), \text{ alors } u_k = p \text{ pour tout } k \text{ entier non nul.}}$$

6. On note $\operatorname{supp} \mathrm{Y}_1 = \{f_{k_1}, \ldots, f_{k_n}\}$ avec les k_j premiers entre eux dans leur ensemble. On a

$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \frac{1}{1 - \sum\limits_{j=1}^{n} f_{k_j} t^{k_j}}$$

On sait que $\sum\limits_{j=1}^{n} f_{k_j} = 1$ donc 1 est un pôle de la fraction rationnelle définissant u. Soit α un pôle complexe de cette fraction rationnelle avec $|\alpha| \leqslant 1$. On a $\sum\limits_{j=1}^{n} f_{k_j} \alpha^{k_j} = 1$ d'où

$$1 = \left| \sum_{j=1}^{n} f_{k_j} \alpha^{k_j} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} f_{k_j} = 1$$

ce qui prouve que l'inégalité triangulaire est une égalité et par conséquent $\alpha^{k_j} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}$ avec θ réel pour tout $j \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$. Par suite

$$1 = \sum_{j=1}^{n} f_{k_j} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}$$

d'où $\alpha^{k_j} = 1$ pour tout $j \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$. Or, par relation de Bezout, on dispose de u_j entiers relatifs tels que $\sum\limits_{j=1}^{n} u_j k_j = 1$. Il vient

$$\alpha = \alpha^{\sum_{j=1}^{n} u_j k_j} = 1$$

Ainsi, l'unique pôle de module $\leqslant 1$ est égal à 1 et tous les autres sont donc de module > 1. Soit α un pôle de module > 1. Sa contribution dans la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{1-f}$ est de la forme

$$\frac{\lambda_1}{\alpha - t} + \frac{\lambda_2}{(\alpha - t)^2} + \ldots$$

et

$$\frac{\lambda_1}{\alpha - t} = \frac{\lambda_1}{\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^k$$

le terme de degré k est donc proportionnel à $\dfrac{1}{\alpha^k}$ qui est de limite nulle et de même pour les autres termes. Enfin, on trouve

$$\frac{1}{1 - f(t)} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} k_j f_{k_j}} \frac{1}{1-t} + \ldots = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} k_j f_{k_j}} \sum_{k=0}^{+\infty} t^k + \ldots$$

et d'après ce qui précède, on conclut

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \frac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)}}$$