Exercice 1 (Centrale 2022)

Soit n entier non nul et $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^\top \mathrm{B})$ et de la norme euclidienne associée. On pose $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad f(\mathrm{M}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) & \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^2) & \ldots & \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^n) \end{pmatrix}$$

1. (a) Établir $\qquad \forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$

   (b) Montrer qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{E} \qquad |\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})| \leqslant \alpha \|\mathrm{A}\|$$

2. Montrer que f est différentiable et déterminer $\mathrm{d}f(\mathrm{M})$ pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$.

3. (a) Montrer $\qquad \forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{rg}\, \mathrm{d}f(\mathrm{M}) = \deg \pi_{\mathrm{M}}$

   (b) En déduire que l'ensemble des matrices de E dont le polynôme minimal est de degré n est un ouvert de E.

Corrigé : 1.(a) L'application $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^\top \mathrm{B}) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E. Il en résulte que $\mathrm{M} \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^\top \mathrm{M})}$ est une norme sur E. Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$ et $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$. On a $\|\mathrm{C}\|^2 = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} c_{i,j}^2$. Par définition du produit matriciel et inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, il vient

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2 \qquad c_{i,j}^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right)$$

Ainsi $$\|\mathrm{C}\|^2 \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left[\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) \right] = \left(\sum_{1 \leqslant i,k \leqslant n} a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{1 \leqslant k,j \leqslant n} b_{k,j}^2 \right)$$

On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{M} \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^\top \mathrm{M})} \text{ est une norme sous-multiplicative sur E.}}$$

1.(b) Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$|\mathrm{Tr}\ \mathrm{A}| = |\langle \mathrm{I}_n, \mathrm{A} \rangle| \leqslant \|\mathrm{I}_n\| \|\mathrm{A}\|$$

Ainsi $$\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathrm{A} \qquad |\mathrm{Tr}\ \mathrm{A}| \leqslant \sqrt{n} \|\mathrm{A}\|}$$

2. Notons $\varphi_k : \mathrm{M} \to \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^k)$ pour $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. L'application φ_k est polynomiale en les coefficients de la matrice d'où $\varphi_k \in \mathscr{C}^1(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$. Pour $(\mathrm{M}, \mathrm{H}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a

$$(\mathrm{M} + \mathrm{H})^k = \mathrm{M}^k + \mathrm{M}^{k-1}\mathrm{H} + \mathrm{M}^{k-2}\mathrm{HM} + \ldots + \mathrm{HM}^{k-1} + \mathrm{R}$$

avec R une somme de produits qui contient au moins deux occurrences de H. Avec l'inégalité établie à la question 1.(b), il en résulte que $|\mathrm{Tr}\,(\mathrm{R})| = \mathrm{o}(\|\mathrm{H}\|)$ et on en déduit

$$\varphi_k(\mathrm{M} + \mathrm{H}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^k + \mathrm{M}^{k-1}\mathrm{H} + \mathrm{M}^{k-2}\mathrm{HM} + \ldots + \mathrm{HM}^{k-1}) + \mathrm{o}(\mathrm{H})$$

d'où $$\forall (\mathrm{M}, \mathrm{H}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \mathrm{d}(\varphi_k)(\mathrm{M}) \cdot \mathrm{H} = k\, \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^{k-1}\mathrm{H})$$

Par suite

$$\boxed{\forall (\mathrm{M}, \mathrm{H}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \mathrm{d}f(\mathrm{M}) \cdot \mathrm{H} = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{H}) & 2\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{MH}) & \ldots & n\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^{n-1}\mathrm{H}) \end{pmatrix}}$$

3.(a) Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. On a

$$\mathrm{H} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) \iff \forall k \in [\![0\,;\, n-1]\!] \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^k\mathrm{H}) = 0$$

$$\iff \forall k \in [\![0\,;\, n-1]\!] \qquad \left\langle \left(\mathrm{M}^\top\right)^k, \mathrm{H} \right\rangle = 0$$

$$\mathrm{H} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) \iff \mathrm{H} \in \mathrm{Vect}\ \left(\mathrm{I}_n, \mathrm{M}^\top, \ldots, \left(\mathrm{M}^\top\right)^{n-1}\right)^\perp$$

On note $d = \deg \pi_{\mathrm{M}^\top}$. On a

$$\mathbb{R}[\mathrm{M}^\top] = \mathbb{R}_{d-1}[\mathrm{M}^\top] \subset \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{M}^\top] \subset \mathbb{R}[\mathrm{M}^\top]$$

ce qui prouve que les inclusions sont des égalités et $(\mathrm{I}_n, \ldots, \left(\mathrm{M}^\top\right)^{d-1})$ est libre. Ainsi, on a

$$\mathrm{H} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) \iff \mathrm{H} \in \mathbb{R}_{d-1}[\mathrm{M}]^\perp$$

d'où $\qquad \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) = \dim \mathbb{R}_{d-1}[\mathrm{M}]^\perp = \dim \mathrm{E} - \dim \mathbb{R}_{d-1}[\mathrm{M}] = \dim \mathrm{E} - \deg \pi_{\mathrm{M}^\top}$

et d'après le théorème du rang $\qquad \mathrm{rg}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) = \deg \pi_{\mathrm{M}^\top}$

Enfin, on a $\pi_\mathrm{M}(\mathrm{M}) = 0$ et en transposant cette égalité, on trouve $\pi_\mathrm{M}(\mathrm{M}^\top) = 0$ d'où $\pi_{\mathrm{M}^\top}$ divise π_M et de même π_M divise $\pi_{\mathrm{M}^\top}$ par symétrie des rôles entre M et $\mathrm{M}^\top$. Les polynômes minimaux π_M et $\pi_{\mathrm{M}^\top}$ sont associés, unitaires d'où $\pi_\mathrm{M} = \pi_{\mathrm{M}^\top}$ et on conclut

$$\boxed{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{rg}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) = \deg \pi_\mathrm{M}}$$

3.(b) Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\deg \pi_\mathrm{A} = n$. D'après ce qui précède, on a $\mathrm{rg}\ \mathrm{d}f(\mathrm{A}) = n$. Notant $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ les bases canoniques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$, il existe une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ extraite de $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\mathrm{d}f(\mathrm{A})$. Soit I la plage d'indices d'extraction des colonnes. On considère $\Phi : \mathrm{M} \to \det\left(\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\mathrm{d}f(\mathrm{M})\right)_{(i,j)\in \mathrm{I}\times[\![1\,;\,n]\!]}$. L'ensemble $\mathrm{U} = \Phi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue avec $\mathrm{A} \in \mathrm{U}$ et tout élément de U est de rang supérieur ou égal à n et donc égal à n. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ dont le polynôme minimal est de degré } n \text{ est un ouvert.}}$$

Exercice 2 (Centrale 2019)

Pour n entier non nul, on note $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 0 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 0 & & n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & 2 & 3 & & 0 \end{pmatrix}$ et $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+x} - 1$.

1. (a) Tracer le graphe de f_n pour $n \in [\![3\,;\,8]\!]$.
   (b) Déterminer des valeurs approchées de la solution de $f_n(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ pour $n \in [\![3\,;\,8]\!]$.
   (c) Écrire une fonction `A(n)` qui renvoie la matrice A_n.
   (d) Calculer les valeurs propres de A_n pour $n \in [\![3\,;\,8]\!]$. Que peut-on conjecturer ?
2. Montrer la conjecture précédente.
3. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?
4. Montrer que la matrice A_n admet une unique valeur propre λ_n dans $]-1\,;+\infty[$ puis montrer que celle-ci est supérieure à n à partir d'un certain rang.
5. Déterminer un équivalent simple de λ_n pour $n \to +\infty$.
6. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de λ_n pour $n \to +\infty$.

Corrigé : 1.(a) On saisit :

```
f=lambda n,x:sum([k/(k+x) for k in range(1,n+1)])-1

tx=np.linspace(0,40,1000)
for n in range(3,9):
    tf=[f(n,x) for x in tx]
    plt.plot(tx,tf)
plt.grid();plt.show()
```

On observe :

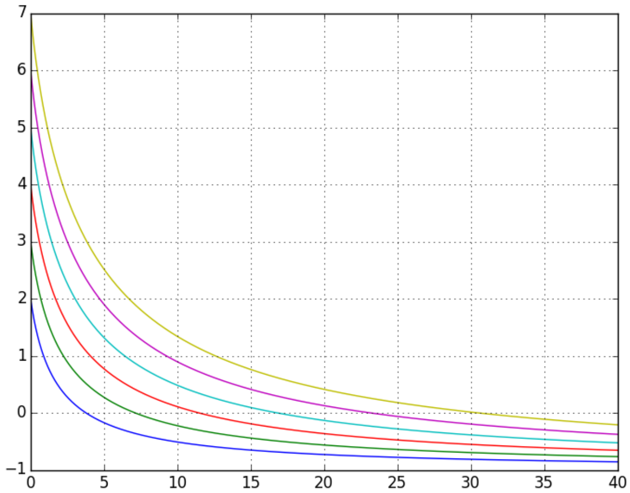


FIGURE 1 – Tracé des graphes de f_n pour $n \in [\![3\,;\,8]\!]$

1.(b) On saisit :

```
def x(n):
    return resol.fsolve(lambda x:f(n,x),0)[0]

for n in range(3,9):
    print("x(",n,")=",x(n))
```

On obtient :

```
x( 3 )= 3.76643548385
x( 4 )= 7.10619620421
x( 5 )= 11.4423101591
x( 6 )= 16.7770281674
x( 7 )= 23.1111133504
x( 8 )= 30.4448774786
```

1.(c) On saisit :

```
def A(n):
    res=np.zeros((n,n))
    for j in range(n):
        for i in range(n):
            res[i,j]=j+1
        res[j,j]=0
    return res
```

1.(d) On saisit :

```
n= 3
sp= [ 3.76643548 -1.28282386 -2.48361162]

n= 4
sp= [ 7.1061962  -1.21448662 -3.52502525 -2.36668434]
...
```

On conjecture $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \max \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}_n) = f_n^{-1}(\{0\}) \cap \mathbb{R}_+}$

2. Soit n entier non nul. Avec les opérations $\mathrm{L}_k \leftarrow \mathrm{L}_k - \mathrm{L}_1$ pour $k \in [\![2\,; n]\!]$, notant χ_n le polynôme caractéristique de A_n, on obtient

$$\chi_n = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -2 & \dots & \dots & -n \\ -1-\mathrm{X} & \mathrm{X}+2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ -1-\mathrm{X} & 0 & \dots & 0 & \mathrm{X}+n \end{vmatrix}$$

En considérant $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, avec l'opération $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{k}{x+k}\mathrm{L}_k$, on obtient

$$\chi_n(x) = \left[x - (x+1)\sum_{k=2}^{n} \frac{k}{x+k}\right] \prod_{k=2}^{n} (x+k)$$

D'où $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}^- \qquad \chi_n(x) = -f_n(x) \prod_{k=1}^{n} (x+k)}$$

La fonction f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}^-$ avec $f_n(0) = n-1 > 0$ et $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$. La fonction f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-1\,;n-1]$ d'où l'existence et unicité d'une racine de f_n sur $\mathbb{R}_+$. D'après la relation obtenue entre χ_n et f_n, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \max \operatorname{Sp}(\mathrm{A}_n) = f_n^{-1}(\{0\}) \cap \mathbb{R}_+}$$

3. Soit n entier non nul. D'après la relation précédemment obtenue, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}^- \qquad \chi_n(x) = 0 \iff f_n(x) = 0$$

Une étude de fonction montre que f_n décroît strictement avec $f_n(x) \xrightarrow[x\to-k^+]{} +\infty$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to-k^-]{} -\infty$ pour tout $k \in [\![1\,; n]\!]$ et $f_n(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$. On en déduit que f_n s'annule exactement une fois sur chaque intervalle $]-k\,;-(k-1)[$ pour $k \in [\![2\,; n]\!]$, exactement une fois sur $]-1\,;+\infty[$ et pas sur $]-\infty\,;-n[$. Ainsi, la fonction f_n admet n racines distinctes sur $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}^-$ qui sont également racines de χ_n. Comme χ_n est un polynôme de degré n, les racines de f_n sont toutes les racines de χ_n. Par condition suffisante, on conclut

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier non nul, la matrice } \mathrm{A}_n \text{ est diagonalisable.}}$$

4. Soit n entier non nul. L'étude de fonction montre que f_n admet une unique racine sur $]-1\,;+\infty[$. Par conséquent

$$\boxed{\text{La matrice } \mathrm{A}_n \text{ admet une unique valeur propre } \lambda_n \in\,]-1\,;+\infty[.}$$

On a $$f_n(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+n} - 1 \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n} - 1 = \frac{n+1}{4} - 1$$

D'où $$f_n(n) \geqslant 0 \iff n \geqslant 3$$

Ainsi $$\boxed{\forall n \geqslant 3 \qquad \lambda_n \geqslant n}$$

5. Soit n entier non nul. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+\lambda_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda_n} \iff \frac{n(n+1)}{2(\lambda_n+n)} \leqslant 1 \leqslant \frac{n(n+1)}{2\lambda_n}$$

d'où $$\frac{n(n+1)}{2} - n \leqslant \lambda_n \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$$

On en déduit $$\boxed{\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2}}$$

Remarque : On a $$\frac{n(n-1)}{2} \geqslant n \iff n \geqslant 3$$

La minoration obtenue est donc meilleure que celle établie à la question précédente.

6. Soit n entier non nul. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda_n} = 1 \iff \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda_n}\left(1 + \frac{k}{\lambda_n}\right)^{-1} = 1$$

On a $$(1+u)^{-1} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + \mathrm{o}(u) = 1 - u + u\varepsilon(u) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$$

Pour $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, on obtient

$$\left(1+\frac{k}{\lambda_n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{k}{\lambda_n}+\frac{k}{\lambda_n}\varepsilon\left(\frac{k}{\lambda_n}\right) \quad \text{avec} \quad \left|\varepsilon\left(\frac{k}{\lambda_n}\right)\right| \leqslant \|\varepsilon\|_{\infty,]\,0\,;\,\frac{n}{\lambda_n}\,]} = \mathrm{o}(1)$$

Ainsi
$$\lambda_n = \sum_{k=1}^{n} k - (1+\mathrm{o}(1))\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\lambda_n}$$

d'où
$$\lambda_n = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-\left(\frac{2}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{n^3}{3}+\mathrm{o}(n^3)\right)(1+\mathrm{o}(1)) = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-\frac{2}{3}n+\mathrm{o}(n)$$

On conclut
$$\boxed{\lambda_n = \frac{n^2}{2}-\frac{n}{6}+\mathrm{o}(n)}$$

Remarque : Avec du courage et du temps, on peut améliorer la précision du développement asymptotique. On a $(1+u)^{-1} = 1-u+u^2+u^2\varepsilon(u)$ puis

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \sum_{k=1}^{n} k\left[1-\frac{k}{\lambda_n}+\frac{k^2}{\lambda_n^2}\left(1+\varepsilon\left(\frac{k^2}{\lambda_n}\right)\right)\right]\\ &= \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-\frac{1}{\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{n}{6}+\mathrm{o}(n)}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\underbrace{\frac{1}{\lambda_n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1}(1+\mathrm{o}(1))\end{aligned}$$

On obtient
$$\boxed{\lambda_n = \frac{n^2}{2}-\frac{n}{6}-\frac{2}{9}+\mathrm{o}(1)}$$

On saisit :

```
tn=range(1,100)
tx=[x(n) for n in tn]
plt.plot(tn,tx)
plt.grid();plt.show()

tn=range(100,200)
tx=[x(n) for n in tn]
print("\nRégression parabolique=",np.polyfit(tn,tx,2))
```

On observe :

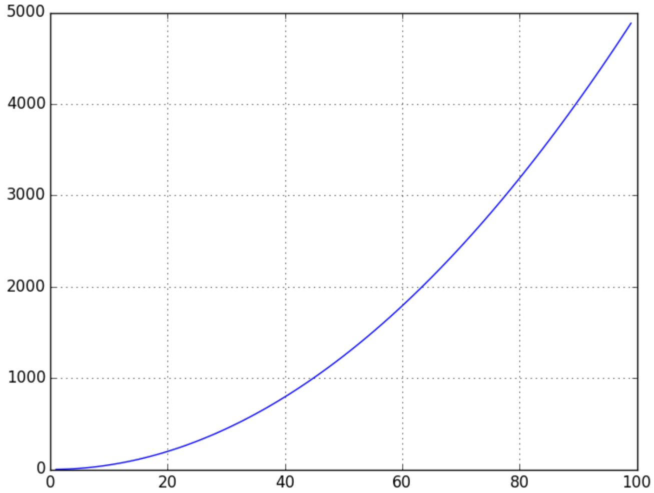


Figure 2 – Tracé de $(\lambda_n)_n$

et on obtient :

```
Régression parabolique= [ 0.50000001 -0.16667039 -0.22166145]
```

Exercice 3 (Centrale 2021)

Soit n entier non nul, $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, N une norme sur E et S la sphère unité de E. On pose

$$\mathrm{N}^\star(\mathrm{A}) = \sup\{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}), \mathrm{M} \in \mathrm{S}\}$$

1. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, \mathrm{M} \mapsto \det(\mathrm{M})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{A}_0 \in \mathrm{S}$ telle que $f(\mathrm{A}_0) = \underset{\mathrm{S}}{\mathrm{Max}}\, f$ puis que A_0 est inversible
2. Montrer que $\mathrm{N}^\star$ est une norme sur E.
3. Montrer $$\mathrm{N}^\star(\mathrm{A}_0^{-1}) = n$$

Corrigé : 1. L'application f est continue car polynomiale en les coefficients de M. L'ensemble S est un fermé borné d'un espace vectoriel de dimension finie ce qui prouve que S est un compact et par conséquent, la fonction f atteint son maximum sur S, *i.e.*

$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{A}_0 \in \mathrm{S} \text{ telle que } f(\mathrm{A}_0) = \underset{\mathrm{S}}{\mathrm{Max}}\, f.}$$

Puis $$f(\mathrm{A}_0) \geqslant f\left(\frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{N}(\mathrm{I}_n)}\right) = \frac{1}{\mathrm{N}(\mathrm{I}_n)^n} > 0$$

Il s'ensuit $$\boxed{\text{La matrice } \mathrm{A}_0 \text{ est inversible.}}$$

2. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. L'ensemble $\{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}), \mathrm{M} \in \mathrm{S}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ en considérant par exemple $\mathrm{M} = \mathrm{I}_n/\mathrm{N}(\mathrm{I}_n)$ et en munissant E de sa structure euclidienne canonique, on a

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S} \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) = \langle \mathrm{A}^\top, \mathrm{M} \rangle \leqslant \|\mathrm{A}^\top\|\,\|\mathrm{M}\|$$

Les normes N et $\|\cdot\|$ étant équivalentes, il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $\|\mathrm{M}\| \leqslant \alpha \mathrm{N}(\mathrm{M}) = \alpha$ ce qui prouve que l'ensemble $\{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}), \mathrm{M} \in \mathrm{S}\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ qui admet donc une borne supérieure finie. Pour $\mathrm{A} \neq 0_{\mathrm{E}}$, en choisissant $\mathrm{M} = \mathrm{A}^\top/\mathrm{N}(\mathrm{A}^\top) \in \mathrm{S}$, on a $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) = \|\mathrm{A}^\top\|^2/\mathrm{N}(\mathrm{A}^\top) > 0$. Il s'ensuit que $\mathrm{N}^\star(\mathrm{A})$ est une quantité strictement positive pour $\mathrm{A} \neq 0_{\mathrm{E}}$, nulle si et seulement si $\mathrm{A} = 0_{\mathrm{E}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S} \qquad \mathrm{Tr}\,(\lambda \mathrm{AM}) = \lambda\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) \leqslant |\lambda|\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}) \leqslant |\lambda|\,\mathrm{N}^\star(\mathrm{A})$$

avec $\widehat{\mathrm{M}} = \pm\,\mathrm{M} \in \mathrm{S}$ telle que $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}\widetilde{\mathrm{M}}) \geqslant 0$. Et passant à la borne supérieure, il s'ensuit

$$\mathrm{N}^\star(\lambda \mathrm{A}) \leqslant |\lambda|\,\mathrm{N}^\star(\mathrm{A})$$

Puis, pour $\lambda \neq 0$ $$\mathrm{N}^\star(\mathrm{A}) = \mathrm{N}\left(\frac{1}{\lambda}\lambda \mathrm{A}\right) \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\mathrm{N}^\star(\lambda \mathrm{A})$$

d'où $$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad |\lambda|\,\mathrm{N}^\star(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{N}^\star(\lambda \mathrm{A})$$

l'inégalité étant trivialement vraie pour $\lambda = 0$. Par double inégalité, l'homogénéité s'en déduit. Pour $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{S} \qquad \mathrm{Tr}\,((\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}) + \mathrm{Tr}\,(\mathrm{BM}) \leqslant \mathrm{N}^\star(\mathrm{A}) + \mathrm{N}^\star(\mathrm{B})$$

d'où l'inégalité triangulaire. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{N}^\star \text{ est une norme.}}$$

Remarque : Pour le caractère borné de $\{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM}), \mathrm{M} \in \mathrm{S}\}$, on peut aussi invoquer le théorème des bornes atteintes avec l'application continue $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AM})$ sur le compact S.

3. On a $$\mathrm{N}^*(\mathrm{A}_0^{-1}) \geqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}_0^{-1}\mathrm{A}_0) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{I}_n) = n$$

L'inégalité dans l'autre sens est plus délicate. Pour $t > 0$ et $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$, on a

$$f\left(\frac{\mathrm{A}_0 + t\mathrm{M}}{\mathrm{N}(\mathrm{A}_0 + t\mathrm{M})}\right) \leqslant f(\mathrm{A}_0)$$

Puis $$\det(\mathrm{A}_0 + t\mathrm{M}) \leqslant \det(\mathrm{A}_0)\mathrm{N}(\mathrm{A}_0 + t\mathrm{M})^n \leqslant \det(\mathrm{A}_0)\left(\mathrm{N}(\mathrm{A}_0) + t\mathrm{N}(\mathrm{M})\right)^n$$

Ainsi $$\frac{\det(\mathrm{A}_0 + t\mathrm{M}) - \det(\mathrm{A}_0)}{t} \leqslant \det(\mathrm{A}_0)\frac{(1 + t\mathrm{N}(\mathrm{M}))^n - 1}{t}$$

Faisant tendre $t \to 0^+$, on obtient (sous réserve de connaître la différentielle du déterminant...)

$$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{Com}(\mathrm{A}_0)\mathrm{M}^\top\right) \leqslant \det(\mathrm{A}_0)n\mathrm{N}(\mathrm{M})$$

c'est-à-dire $$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}_0^{-1}\mathrm{M}\right) \leqslant n$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{N}^\star(\mathrm{A}_0^{-1}) = n}$$

Exercice 4 (Centrale 2017)

1. On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n = \dfrac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$

   Tracer sur un même graphe les sommes partielles de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n+1}}{\mathrm{R}_n}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2n}$.
   Quelles conjectures peut-on émettre ?
   (On pourra approcher R_n par une somme à 100 termes.)

   À présent, on considère $(a_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans $]\,0\,;+\infty\,[$ telle que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge. On pose $\mathrm{R}_= \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ pour n entier.

2. Montrer $\qquad \forall n \geqslant 1 \qquad \dfrac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}} \leqslant 2\left(\sqrt{\mathrm{R}_n} - \sqrt{\mathrm{R}_{n+1}}\right)$

   En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}}$.

3. Soit m et n deux entiers tels que $1 \leqslant m \leqslant n$. Montrer
$$\sum_{i=m}^{n} \frac{a_{i+1}}{\mathrm{R}_i} \geqslant 1 - \frac{\mathrm{R}_{n+1}}{\mathrm{R}_m}$$
   En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n+1}}{\mathrm{R}_n}$.

4. Montrer qu'il existe $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$ tel que :
   — Pour tout $\beta \in\,]\,0\,;\alpha\,[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n+1}}{(\mathrm{R}_n)^\beta}$ converge ;
   — Pour tout $\beta \in\,]\,\alpha\,;+\infty\,[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n+1}}{(\mathrm{R}_n)^\beta}$ diverge.

5. Donner la valeur de α dans le cas $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ pour $n \geqslant 1$.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def a(n):
    return 1/n**2

def R(n):
    return sum([a(k) for k in range(n+1,n+1001)])

tn=range(1,100)
u1=[a(n+1)/R(n) for n in tn]
u2=[a(n+1)/np.sqrt(R(n)) for n in tn]
u3=[1/(2*n) for n in tn]
t1=[sum(u1[:n+1]) for n in tn]
t2=[sum(u2[:n+1]) for n in tn]
t3=[sum(u3[:n+1]) for n in tn]

plt.plot(tn,t1,tn,t2,tn,t3)
plt.legend(['q1','q2','q3']);plt.grid();plt.show()
```

On observe :

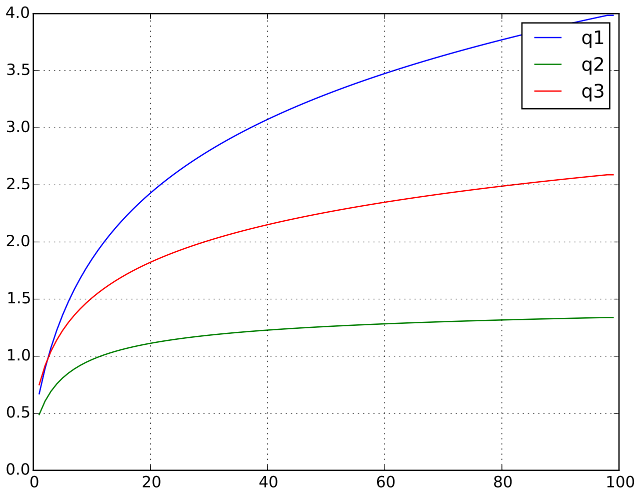


FIGURE 3 – Tracé des sommes partielles

On conjecture $\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}} \text{ converge et } \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n+1}}{\mathrm{R}_n} \text{ diverge.}}$

2. Soit n entier non nul. On a $\dfrac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}} = \dfrac{\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}} \leqslant \displaystyle\int_{\mathrm{R}_{n+1}}^{\mathrm{R}_n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$

Ainsi $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \frac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}} \leqslant 2\left(\sqrt{\mathrm{R}_n} - \sqrt{\mathrm{R}_{n+1}}\right)}$

La série $\sum_{n\geqslant 1} 2\left(\sqrt{\mathrm{R}_n} - \sqrt{\mathrm{R}_{n+1}}\right)$ est téléscopique avec $\sqrt{\mathrm{R}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'où sa convergence. Par comparaison de séries à termes positifs, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}} \text{ converge.}}$$

3. Soit m et n deux entiers tels que $1 \leqslant m \leqslant n$. La suite $(\mathrm{R}_n)_{n\geqslant 1}$ décroît. Ainsi, on a

$$\sum_{i=m}^{n} \frac{a_{i+1}}{\mathrm{R}_i} \geqslant \sum_{i=m}^{n} \frac{a_{i+1}}{\mathrm{R}_m} = \frac{\mathrm{R}_m - \mathrm{R}_{n+1}}{\mathrm{R}_m}$$

D'où $\boxed{\forall 1 \leqslant m \leqslant n \qquad \sum_{i=m}^{n} \frac{a_{i+1}}{\mathrm{R}_i} \geqslant 1 - \frac{\mathrm{R}_{n+1}}{\mathrm{R}_m}}$

Faisant tendre $n \to +\infty$, on a dans $[\,0\,;+\infty\,]$ avec le point de vue des familles sommables à termes positifs

$$\forall m \geqslant 1 \qquad \sum_{i=m}^{+\infty} \frac{a_{i+1}}{\mathrm{R}_i} \geqslant 1$$

Si la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n+1}}{\mathrm{R}_n}$ converge, alors son reste serait de limite nulle ce qui est impossible d'après la minoration précédente. On conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n+1}}{\mathrm{R}_n} \text{ diverge.}}$$

4. Considérons l'ensemble $\qquad \mathrm{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \mid \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n+1}}{(\mathrm{R}_n)^x} \text{ converge} \right\}$

L'ensemble E est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ puisque $\dfrac{1}{2} \in \mathrm{E}$. D'après ce qui précède, on a $1 \notin \mathrm{E}$ et plus généralement, pour $x \geqslant 1$, avec $(\mathrm{R}_n)^x \leqslant \mathrm{R}_n$ pour n assez grand, il s'ensuit que $\dfrac{a_{n+1}}{(\mathrm{R}_n)^x} \geqslant \dfrac{a_{n+1}}{\mathrm{R}_n}$ à partir d'un certain rang. On en déduit que E est majoré par 1 et on peut donc poser

$$\boxed{\alpha = \operatorname{Sup} \mathrm{E}}$$

Par définition d'une borne supérieure, les propriétés attendues sont immédiates.

5. Par comparaison série/intégrale, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{n}$$

Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $\qquad \dfrac{a_{n+1}}{(\mathrm{R}_n)^x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^x}{n^2} = \dfrac{1}{n^{2-x}}$

On en déduit $\qquad \boxed{\alpha = 1}$

Exercice 5 (Centrale 2015)

1. Écrire une fonction `S(n,p)` qui simule une variable aléatoire $\mathrm{S}_n = \mathrm{Y}/n$ où $\mathrm{Y} \sim \mathscr{B}(n,p)$.
2. En déduire une fonction `test(n,p)` qui affiche les courbes interpolant les points (k, S_k), $\left(k, p+\sqrt{\dfrac{\ln k}{k}}\right)$ et $\left(k, p-\sqrt{\dfrac{\ln k}{k}}\right)$. Que remarque-t-on ?

   Soit $t > 0$ et $x \in [\,-1\,;1\,]$.

3. Montrer $$\mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)\mathrm{e}^{t}$$
4. On considère X variable aléatoire telle que $|\mathrm{X}| \leqslant 1$ et $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 0$. Pour $t > 0$, montrer que $\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}$ est d'espérance finie et que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}) \leqslant \mathrm{ch}\,(t) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$.
5. Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes telles que pour tout $i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$, on a $|\mathrm{X}_i| \leqslant a_i$ avec les $a_i > 0$. On pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$. Montrer $$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n}) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$
6. Montrer $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$
7. En déduire $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-\varepsilon/\left(2\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\right)$$
8. Commenter le résultat observé à la deuxième question.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def S(n,p):
    return rd.binomial(n,p)/n

def test(n,p):
    tk=range(1,n+1)
    tS=[S(k,p) for k in tk]
    tp=[p+np.sqrt(np.log(k)/k) for k in tk]
    tm=[p-np.sqrt(np.log(k)/k) for k in tk]
    plt.plot(tk,tS,'bo--');plt.plot(tk,tp,'r--');plt.plot(tk,tm,'r--')
    plt.grid();plt.show()
```

On observe :

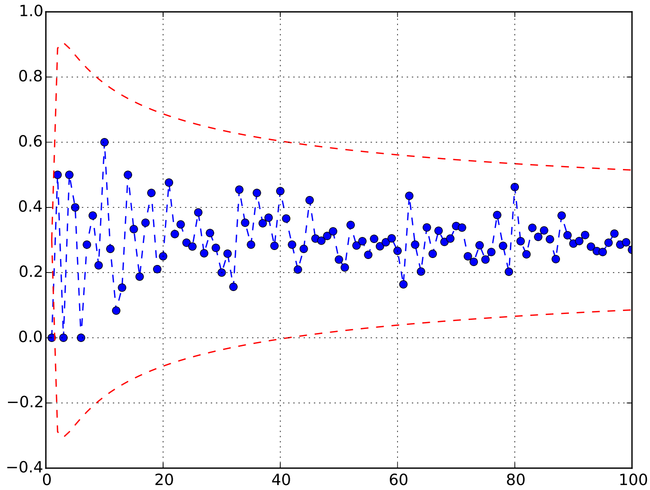


FIGURE 4 – Tracé des suites $(\mathrm{S}_n)_n$, $\left(p+\sqrt{\dfrac{\ln n}{n}}\right)_n$, $\left(p-\sqrt{\dfrac{\ln n}{n}}\right)_n$

On conjecture que

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)_n \text{ semble presque sûrement coincée entre les deux autres suites.}}$$

3. Soit $(t, x) \in \mathbb{R} \times [\,0\,;1\,]$. On a

$$tx = \frac{1}{2}(1-x)(-t) + \frac{1}{2}(1+x)t$$

avec $$\frac{1}{2}(1-x), \frac{1}{2}(1+x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1+x) = 1$$

Par convexité de l'exponentielle, on trouve

$$\boxed{\mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)\mathrm{e}^{t}}$$

4. Soit t réel. On a $0 \leqslant \mathrm{e}^{t\mathrm{X}} \leqslant \mathrm{e}^{t}$ et par comparaison, la variable aléatoire $\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}$ est d'espérance finie. Avec l'inégalité précédemment obtenue, il vient

$$\mathrm{e}^{t\mathrm{X}} \leqslant \frac{1}{2}(1-\mathrm{X})\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+\mathrm{X})\mathrm{e}^{t}$$

Puis, par croissance de l'espérance et en utilisant le fait que X est une variable centrée, on trouve $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}) \leqslant \mathrm{ch}\,(t)$. Enfin, on a les développements en série entières

$$\mathrm{ch}\,(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

Par récurrence, on montre que $2^n n! \leqslant (2n)!$ pour tout n entier et on conclut

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}) \leqslant \mathrm{ch}\,(t) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}}$$

5. Soit t réel. Pour $i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$, on pose $\mathrm{U}_i = \mathrm{X}_i / a_i$. On a

$$\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t\mathrm{X}_i} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{ta_i\mathrm{U}_i}$$

avec les U_i vérifiant les hypothèses de la question 4. Ainsi, les variables $\mathrm{e}^{ta_i\mathrm{U}_i}$ sont d'espérance finie et le produit de variables indépendantes d'espérance finies est d'espérance finie. Puis, on trouve

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n}) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{ta_i\mathrm{U}_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{ta_i\mathrm{U}_i}\right) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{t^2a_i^2}{2}}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n}) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)}$$

6. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $t > 0$, on a après transformation de Chernoff et inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n} \geqslant \mathrm{e}^{t\varepsilon}) \leqslant \mathrm{e}^{-t\varepsilon}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n})$$

Et avec l'inégalité précédente, on conclut

$$\boxed{\forall t > 0 \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)}$$

7. On choisit t qui minimise le trinôme $t \mapsto -t\varepsilon + \dfrac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ et on obtient

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-\varepsilon^2/\left(2\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\right)}$$

8. En considérant $\mathrm{T}_n = \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - p)$ avec les X_i indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, on a $|\mathrm{X}_i - p| \leqslant 1$ et par application de l'inégalité précédente, pour $\alpha > \sqrt{2}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(\mathrm{T}_n > \alpha\sqrt{n \ln n}) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}\ln n} = \frac{1}{n^{\frac{\alpha^2}{2}}}$$

Ainsi, pour $\alpha > \sqrt{2}$, la série $\sum \mathbb{P}(\mathrm{T}_n > \alpha\sqrt{n \ln n})$ converge et d'après le lemme de Borel-Cantelli (résultat non exigible en principe, classique mais difficile), on en déduit

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{T}_n > \alpha\sqrt{n \ln n} \quad \text{infiniment souvent}\right) = 0$$

d'où $\qquad \mathrm{T}_n \leqslant \alpha\sqrt{n \ln(n)}$ à partir d'un certain rang presque sûrement

Comme une intersection dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre, on en déduit que l'événement

$$\bigcap_{\alpha \in \left]\sqrt{2}\,;+\infty\right[\cap\mathbb{Q}} \left\{\mathrm{T}_n \leqslant \alpha\sqrt{n}\ln n \quad \text{à partir d'un certain rang}\right\}$$

est presque sûr, autrement dit

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{T}_n \leqslant \sqrt{2n\ln(n)} \quad \text{à partir d'un certain rang}\right) = 1$$

ce qui équivaut, avec les notations de la première question, à $\mathrm{S}_n - p \leqslant \sqrt{2\dfrac{\ln(n)}{n}}$ à partir d'un certain rang presque sûrement. Par un argument symétrique, on peut obtenir une minoration de la même forme et on conclut

$$\boxed{\text{Presque sûrement, à partir d'un certain rang, on a } \mathrm{S}_n \in \left[p - \sqrt{2\frac{\ln(n)}{n}}\,; p + \sqrt{2\frac{\ln(n)}{n}}\right].}$$

Remarque : il y a un facteur $\sqrt{2}$ en trop qu'on ne semble pas pouvoir améliorer en suivant la démarche du sujet, à moins que la conclusion attendue soit tout simplement d'annoncer que l'événement $\left\{\mathrm{S}_n \in \left[p - \sqrt{\frac{\ln n}{n}}\,; p + \sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right]\right\}$ a une probabilité proche de 1 pour n grand, ce qui éviterait le recours (surréaliste) au lemme de Borel-Cantelli en fin de planche ...

Exercice 6 (Centrale 2019)

On pose
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

1. Montrer que ζ est définie et continue sur $\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\,(z) > 1\}$.
2. Soit $a \geqslant 0$ et $f \in \mathscr{C}^1([\,a\,;+\infty\,[\,,\mathbb{C})$. Montrer
$$\forall n \geqslant a \qquad \left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{2} \operatorname*{Max}_{[\,n\,;n+1\,]} |f'|$$
3. Montrer que $s \mapsto \zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ est prolongeable par continuité sur $\mathrm{D}' = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (n,s) \in \mathbb{N}^* \times \mathrm{D} \qquad u_n(s) = \dfrac{1}{n^s} = \mathrm{e}^{-s\ln(n)}$

La fonction exponentielle étant continue sur $\mathbb{C}$, il s'ensuit que les fonctions u_n sont continues sur D. Soit $a > 1$ et $\mathrm{D}_a = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\,(z) > a\}$. On a
$$\forall (n,s) \in \mathbb{N}^* \times \mathrm{D}_a \qquad \left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}\,(s)}} \leqslant \frac{1}{n^a}$$

Ainsi, la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement donc uniformément sur D_a pour tout $a > 1$ donc sur tout compact de D et on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est définie continue sur D.}}$$

2. Soit $n \geqslant a$. Il vient par inégalité triangulaire
$$\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_n^{n+1} [f(n) - f(t)]\;\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_n^{n+1} |f(n) - f(t)|\;\mathrm{d}t$$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;+\infty\,[$ donc sa dérivée f' atteint ses bornes sur tout segment inclus dans $[\,a\,;+\infty\,[$ et l'inégalité des accroissements finis donne
$$\forall t \in [\,n\,;n+1\,] \qquad |f(n) - f(t)| \leqslant \operatorname*{Max}_{[\,n\,;n+1\,]} |f'|\,|n-t| = \operatorname*{Max}_{[\,n\,;n+1\,]} |f'|\,(t-n)$$

Après intégration, on conclut
$$\boxed{\forall n \geqslant a \qquad \left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{2} \operatorname*{Max}_{[\,n\,;n+1\,]} |f'|}$$

3. Soit $s \in \mathbb{C}$. On pose $\qquad \forall t \geqslant 1 \qquad f(t) = \dfrac{1}{t^s}$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$ avec par dérivation
$$\forall t \geqslant 1 \qquad f'(t) = -\frac{s}{t^{s+1}}$$

et on a
$$\forall t \geqslant 1 \qquad |f(t)| = \frac{1}{t^{\mathrm{Re}\,(s)}}$$

d'où la convergence absolue de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $s \in \mathrm{D}$ et on trouve
$$\forall s \in \mathrm{D} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \left[\frac{1}{(1-s)t^{s-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{s-1}$$

Puis, pour $s \in \mathrm{D}$, par relation de Chasles puis linéarité du symbole somme car convergence

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right)$$

On pose $\qquad \forall (n,s) \in \mathbb{N}^* \times \mathrm{D}' \qquad f_n(s) = \dfrac{1}{n^s} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \quad$ et $\quad g_n(s) = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$

Pour n entier non nul, procédons par continuité sous l'intégrale pour établir la continuité de g_n.

On rappelle que la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{C}$.

• Pour $s \in \mathrm{D}'$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^s} = \mathrm{e}^{-s\ln(t)}$ est continue par morceaux sur $[\,n\,;n+1\,]$ par composition.

• Pour $t \in [\,n\,;n+1\,]$, la fonction $s \mapsto \dfrac{1}{t^s} = \mathrm{e}^{-s\ln(t)}$ est continue sur D' comme composée de telles fonctions.

•**Domination :** soit $a > 0$. On a

$$\forall (s,t) \in \mathrm{D}_a \times [\,n\,;n+1\,] \qquad \left|\frac{1}{t^s}\right| = \frac{1}{t^{\mathrm{Re}\,(s)}} \leqslant \frac{1}{t^a}$$

et la dominante $t \mapsto \dfrac{1}{t^a}$ est clairement intégrable sur le segment $[\,n\,;n+1\,]$. Par continuité sous l'intégrale, la fonction g_n est continue sur D_a pour tout $a > 0$ et donc sur D' et il s'ensuit que les f_n sont continues.

Soit K un compact de D'. On dispose de $0 < a < b$ tels que

$$\forall s \in \mathrm{K} \qquad a \leqslant \mathrm{Re}\,(s) \leqslant b$$

D'après le résultat de la question précédente, il vient pour n entier non nul et $s \in \mathrm{K}$

$$\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{2} \operatorname*{Max}_{[\,n\,;n+1\,]} |f'|$$

On trouve $\qquad \displaystyle\operatorname*{Max}_{[\,n\,;n+1\,]} |f'| = \operatorname*{Max}_{t\in[\,n\,;n+1\,]} \left|\frac{s}{t^{s+1}}\right| = \frac{\mathrm{Re}\ s}{n^{\mathrm{Re}\,(s)+1}} \leqslant \frac{b}{n^{a+1}}$

Alors, par critère de Riemann, la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout compact de D' et comme la somme coïncide avec $s \mapsto \zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ sur D, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \text{ est prolongeable par continuité sur } \mathrm{D}'.}$$

Exercice 7 (Centrale 2023)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X_x une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $x > 0$.

1. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X}_x)$ puis établir

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{X}_x - \mathbb{E}(\mathrm{X}_x)| \geqslant \varepsilon x\right) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Soit α réel et $u_\alpha(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^\alpha}{n!} x^n$ pour x réel.

2. (a) Préciser le domaine de définition de u_α.
   (b) Déterminer u_1 et u_2.

3. (a) Soit $\alpha < 0$. Montrer $\qquad u_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^x)$

   (b) Soit $\alpha \in \left]-1\,;0\right[$. Établir $\qquad u_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^\alpha \mathrm{e}^x$

Corrigé : 1. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, il vient

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{Y}_x - \mathbb{E}(\mathrm{Y}_x)| \geqslant \varepsilon x\right) \leqslant \frac{1}{(\varepsilon x)^2}\mathbb{V}(\mathrm{Y}_x) = \frac{1}{\varepsilon^2 x}$$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(|\mathrm{Y}_x - x| \geqslant \varepsilon x\right) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)}$

2.(a) Soit α. Pour n entier non nul, on a

$$\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)\alpha\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière définissant u_α est égal à $+\infty$. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } u_\alpha \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ tout entier.}}$$

2.(b) La variable X_x est dans L^2. Par transfert, il vient

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}_x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(\mathrm{X} = x) = \mathrm{e}^{-x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!}x^n \qquad \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(\mathrm{X} = x) = \mathrm{e}^{-x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$$

d'où $\qquad u_1(x) = \mathrm{e}^x\mathbb{E}(\mathrm{X}_x) \quad \text{et} \quad u_2(x) = \mathrm{e}^x\left(\mathbb{V}(\mathrm{X}_x) + \mathbb{E}(\mathrm{X}_x)^2\right)$

Ainsi $\qquad \boxed{u_1(x) = x\mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad u_2(x) = x(1+x)\mathrm{e}^x}$

3.(a) Soit $\alpha < 0$. Pour n entier, on note $\mathrm{R}_n(x)$ le reste d'ordre n de la série définissant $\mathrm{e}^{-x}u_\alpha(x)$. On a

$$0 \leqslant \mathrm{R}_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!k^{|\alpha|}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(n+1)^{|\alpha|}}\underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}}_{\leqslant \mathrm{e}^x} \leqslant \frac{1}{(n+1)^{|\alpha|}}$$

On dispose donc d'un contrôle uniforme du reste d'où $\|\mathrm{R}_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et d'après le théorème de double limite, il vient

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}u_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}\frac{x^n}{n!n^{|\alpha|}} = 0$$

Ainsi $\boxed{\forall \alpha < 0 \qquad u_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^x)}$

Remarque : La convergence normale échoue ici.

3.(b) Soit $\alpha \in \,]-1\,;0\,[$. On pose

$$\forall u \geqslant 0 \qquad \varphi(u) = \begin{cases} u^\alpha & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

La définition de $u_\alpha(x)$ garantit la convergence de la série $\sum \varphi(n)\mathbb{P}(\mathrm{X}_x = n)$. Ainsi, par transfert, il vient

$$\mathbb{E}\left(\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{n}{x}\right)\mathbb{P}(\mathrm{X}_x = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{x^\alpha n!}\mathrm{e}^{-x} = x^{-\alpha}\mathrm{e}^{-x}u_\alpha(x)$$

Puis $$x^{-\alpha}\mathrm{e}^{-x}u_\alpha(x) - 1 = \mathbb{E}\left(\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right)$$

Par inégalité triangulaire dans L^1, il vient

$$\left|\mathbb{E}\left(\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right)\right| \leqslant \mathbb{E}\left(\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right|\right)$$

On localise avec des fonctions indicatrices et on obtient pour $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{E}\left(\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right|\right) = \mathbb{E}\left(\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right| \mathbb{1}_{\{|\mathrm{X}_x - x| < \varepsilon x\}}\right) + \mathbb{E}\left(\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right| \mathbb{1}_{\{|\mathrm{X}_x - x| \geqslant \varepsilon x\}}\right)$$

Comme la variable X_x est valeurs dans $\mathbb{N}$, on observe que

$$\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{X}_x = 0 \\ \left(\dfrac{x}{\mathrm{X}_x}\right)^{|\alpha|} \leqslant x^{|\alpha|} & \text{si } \mathrm{X}_x \geqslant 1 \end{cases}$$

Par conséquent $$\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - 1\right| \leqslant 1 + x^{|\alpha|}$$

et par suite

$$\mathbb{E}\left(\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right| \mathbb{1}_{\{|\mathrm{X}_x - x| \geqslant \varepsilon x\}}\right) \leqslant \left(x^{|\alpha|} + 1\right)\mathbb{P}(|\mathrm{X}_x - x| \geqslant \varepsilon x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^{1-|\alpha|}}\right) = \mathrm{o}(1)$$

Par continuité de φ en 1, pour $\delta > 0$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall u > 0 \qquad |u - 1| < \varepsilon \implies |\varphi(u) - \varphi(1)| < \delta$$

Ainsi $$\mathbb{E}\left(\left|\varphi\left(\frac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right| \mathbb{1}_{\{|\mathrm{X}_x - x| < \varepsilon x\}}\right) \leqslant \delta$$

On peut donc rendre la quantité $\left|\mathbb{E}\left(\varphi\left(\dfrac{\mathrm{X}_x}{x}\right) - \varphi(1)\right)\right|$ arbitrairement petite pour $x \to +\infty$ et on conclut

$$\boxed{u_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^\alpha \mathrm{e}^x}$$

Exercice 8 (Mines-Telecom 2021)

1. Montrer que $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ converge et calculer sa somme S.
2. Déterminer un encadrement de S avec ses sommes partielles.
3. Montrer que le nombre S est irrationnel.

Corrigé : 1. On reconnaît la série associée à $\cos(1)$ puisque $\cos(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{t^n}{(2n)!}$. Ainsi

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} \text{ converge et sa somme S vaut } \cos(1).}$$

2. On pose
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

On a
$$\mathrm{S}_{2(n+1)} - \mathrm{S}_{2n} = \frac{1}{(2(n+1)!} - \frac{1}{(2n+1)!} < 0$$

et
$$\mathrm{S}_{2n+1} - \mathrm{S}_{2n-1} = -\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{1}{(2n)!} > 0$$

La suite $(\mathrm{S}_{2n})_n$ décroît strictement et la suite $(\mathrm{S}_{2n+1})_n$ croît strictement. Or, ces deux suites sont adjacentes puisque $\mathrm{S}_{2n+1} - \mathrm{S}_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et de limite commune S. Ainsi, on a l'encadrement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}_{2n+1} < \mathrm{S} < \mathrm{S}_{2n}}$$

3. Soit n entier. On a
$$\mathrm{S}_{2n+1} = \mathrm{S}_{2n} - \frac{1}{(4n+2)!} < \mathrm{S} < \mathrm{S}_{2n}$$

d'où
$$0 < \mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S} < \frac{1}{(4n+2)!}$$

et ainsi
$$0 < (4n+2)!\mathrm{S}_{2n} - (2n+1)!\mathrm{S} < 1$$

La quantité $(4n+2)!\mathrm{S}_{2n}$ est un entier relatif en tant que somme d'entiers relatifs. Supposons S rationnel, à savoir $\mathrm{S} = \dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Si n est assez grand, alors $(4n+2)!\dfrac{p}{q}$ est entier (puisque q est facteur d'une factorielle assez grande) et par conséquent, le nombre $(4n+2)!\mathrm{S}_{2n} - (2n+1)!\mathrm{S}$ est un entier relatif dans $]\,0\,;1\,[$ ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{Le nombre S est irrationnel.}}$$

Exercice 9 (Mines-Telecom 2023)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ muni de

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f,g\rangle = \int_0^1 [f(t)g(t) + f'(t)g'(t)]\ \mathrm{d}t$$

On pose $\quad \mathrm{V} = \{f \in \mathrm{E} \mid f(0) = f(1) = 0\} \quad$ et $\quad \mathrm{W} = \{f \in \mathrm{E} \mid f'' \text{ existe et } f'' = f\}$

1. Justifier que $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que W est un sev de E de dimension finie et en donner une base.
3. Établir $$\mathrm{V} \perp \mathrm{W}$$
4. Pour $f \in \mathrm{E}$, déterminer une expression simple de $p_{\mathrm{W}}(f)$ en fonction de $f(0)$, $f(1)$ et de la fonction sh.
5. Montrer $$\mathrm{E} = \mathrm{W} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{V}$$

Corrigé : 1. Pour $(f,g) \in \mathrm{E}^2$, l'intégrale définissant $\langle f,g\rangle$ est bien convergente en tant qu'intégrale de fonction continue sur un segment. L'application $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle$ est clairement symétrique, linéaire en la première variable par linéarité de la dérivation, du produit à droite et de l'intégrale. Soit $f \in \mathrm{E}$. On a $\langle f,f\rangle = \displaystyle\int_0^1 [f(t)^2 + f'(t)^2]\ \mathrm{d}t \geqslant 0$ par positivité de l'intégrande et de l'intégrale. Si $\langle f,f\rangle = 0$, comme $f^2 + f'^2$ est continue positive sur $\int 01$, il vient par séparation $f^2 + f'2 = 0$ d'où $f = 0$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } (f,g) \mapsto \langle f,g\rangle \text{ est un produit scalaire sur E.}}$$

2. Les solutions de l'équation $y'' = y$ sur $[\,0\,;1\,]$ sont dans $\operatorname{Vect}(\varphi,\psi)$ avec

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \varphi(t) = \mathrm{e}^t \quad \text{et} \quad \psi(t) = \mathrm{e}^{-t}$$

On vérifie sans peine que cet espace $\operatorname{Vect}(\varphi,\psi)$ est inclus dans W. Par double inclusion, l'égalité $\mathrm{W} = \operatorname{Vect}(\varphi,\psi)$ suit et comme (φ,ψ) est libre, on conclut

$$\boxed{\text{La famille } (\varphi,\psi) \text{ est une base de W.}}$$

3. Soit $f \in \mathrm{E}$. On a $$f \in \mathrm{W}^\perp \iff \begin{cases} \langle f,\varphi\rangle = 0 \\ \langle f,\psi\rangle = 0 \end{cases}$$

En intégrant par parties et en utilisant $\varphi'' = \varphi$, on trouve

$$\begin{aligned} \langle f,\varphi\rangle &= \int_0^1 [f(t)\varphi(t) + f'(t)\varphi'(t)]\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t + [f(t)\varphi'(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t)\varphi''(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)\varphi'(t)]_0^1 \end{aligned}$$

De même, on trouve $$\langle f,\psi\rangle = [f(t)\psi'(t)]_0^1$$

On en déduit $$\forall f \in \mathrm{V} \qquad \langle f,\varphi\rangle = \langle f,\psi\rangle = 0$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{V} \perp \mathrm{W}}$$

Remarque : On pourrait, sans trop d'effort additionnel, établir directement $\mathrm{E} = \mathrm{W} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{V}$.

4. On trouve $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$, $\langle \varphi, \varphi \rangle = \mathrm{e}^2 - 1$ et $\langle \psi, \psi \rangle = 1 - \mathrm{e}^{-2}$. La famille (u_1, u_2) avec $u_1 = \dfrac{\varphi}{\|\varphi\|}$ et $u_2 = \dfrac{\psi}{\|\psi\|}$ est une base orthonormée de W. Pour $f \in \mathrm{E}$, on a

$$p_{\mathrm{W}}(f) = \langle f, u_1 \rangle\, u_1 + \langle f, u_2 \rangle\, u_2 = \frac{\langle f, \varphi \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle}\varphi + \frac{\langle f, \psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle}\psi$$

Notant $g = p_{\mathrm{W}}(f)$, il vient pour $t \in [\,0\,;1\,]$

$$g(t) = \frac{f(1)\mathrm{e} - f(0)}{\mathrm{e}^2 - 1}\mathrm{e}^t + \frac{\mathrm{e}\, f(0) - f(1)}{1 - \mathrm{e}^{-2}}\mathrm{e}^{-t}$$

En factorisant e^1 dans la première fraction et e^{-1} dans la deuxième, on obtient

$$\boxed{\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad p_{\mathrm{W}}(f)(t) = \frac{f(1)}{\mathrm{sh}\,(1)}\,\mathrm{sh}\ t - \frac{f(0)}{\mathrm{sh}\,(1)}\,\mathrm{sh}\,(t-1)}$$

Variante : On peut procéder par caractérisation géométrique. On observe que $(\mathrm{ch}\,, \mathrm{sh}\,)$ est une base de W et on pose $g = f - p_{\mathrm{W}}(f)$.

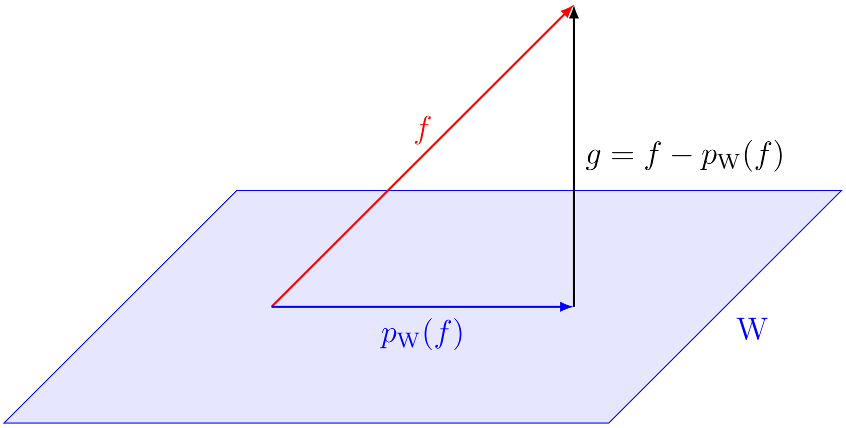


FIGURE 5 – Décomposition d'une projection orthogonale sur W

On a
$$g \in \mathrm{W}^{\perp} \iff \begin{cases} \langle g, \mathrm{ch}\,\rangle = 0 \\ \langle g, \mathrm{sh}\,\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} g(1)\,\mathrm{sh}\,(1) = 0 \\ g(1)\,\mathrm{ch}\,(1) - g(0)\,\mathrm{ch}\,(0) = 0 \end{cases}$$

Notant $g = f - (a\,\mathrm{ch}\, + \mathrm{sh}\,)$ avec a, b réels, il vient

$$g \in \mathrm{W}^{\perp} \iff \begin{cases} f(0) = a \\ f(1) = a\,\mathrm{ch}\,(1) + b\,\mathrm{sh}\,(1) \end{cases}$$

et on retrouve le résultat précédent.

5. On reprend les équivalences établies à la question 3. Pour $f \in \mathrm{E}$, on a

$$\begin{aligned} f \in \mathrm{W}^{\perp} &\iff \begin{cases} f(1)\mathrm{e} - f(0) &= 0 \\ f(1)\mathrm{e}^{-1} - f(0) &= 0 \end{cases} \\ &\iff \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{e} & -1 \\ \mathrm{e}^{-1} & -1 \end{pmatrix}}_{\det = -2\,\mathrm{sh}\ 1 \neq 0} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff f(0) = f(1) = 0 \end{aligned}$$

d'où $\mathrm{W}^{\perp} = \mathrm{V}$ et on conclut $\qquad \boxed{\mathrm{E} = \mathrm{W} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{V}}$

Exercice 10 (Centrale 2017)

On note $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n\sqrt{1-t}}$ et $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n\sqrt{1-t}}$

1. Justifier que I_n et J_n sont bien définies pour tout n entier.
2. Représenter les termes de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in[\![1\,;50]\!]}$.
3. Montrer la monotonie et la convergence de la suite $(\mathrm{I}_n)_n$ et préciser sa limite.
4. Représenter les points $((\ln n, \ln \mathrm{I}_n))_{n\in[\![100\,;1000]\!]}$. En déduire le choix d'un entier α maximal tel que la suite $(n^\alpha \mathrm{I}_n)_n$ puisse converger.
5. Représenter les termes des suites $(n^\alpha \mathrm{I}_n)_{n\in[\![1\,;50]\!]}$ et $(n^\alpha \mathrm{J}_n)_{n\in[\![1\,;50]\!]}$.
   Qu'observe-t-on ?
6. Justifier que $$n^\alpha(\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
7. Établir $$\forall x \geqslant 0 \qquad \ln(1+x) \geqslant \frac{x}{1+x}$$
8. En déduire une démonstration des résultats observés à la question 5.
   On pourra procéder au changement de variable $u = nt$ sur I_n ou J_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
9. Conclure en précisant un équivalent simple de I_n pour $n \to +\infty$.

Corrigé :

1. On note $$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,[\qquad f_n(t) = \frac{1}{(1+t)^n\sqrt{1-t}}$$

   Soit n entier. L'intégrale J_n est bien définie comme intégrale d'une fonction continue sur un segment. Puis, avec le changement de variable $u = 1-t \iff t = 1-u$ (de classe $\mathscr{C}^1$, strictement décroissant, bijectif de $]\,0\,;1\,[$ sur $]\,0\,;1\,[$), le théorème de changement de variable assure que $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 f_n(1-u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature. Or, on a

   $$f_n(1-u) = \frac{1}{(2-u)^n\sqrt{u}} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2^n\sqrt{u}}$$

   Avec le critère de Riemann, on peut donc conclure que

   $$\boxed{\text{Les intégrales } \mathrm{I}_n \text{ et } \mathrm{J}_n \text{ sont bien définies pour tout } n \text{ entier.}}$$

2. On saisit :

```
f=lambda n,t:1/((1+t)**n*np.sqrt(1-t))
I=lambda n:integr.quad(lambda t:f(n,t),0,1)[0]

tn=np.arange(1,51)
tI=[I(n) for n in tn]
plt.plot(tn,tI,'bo')
plt.grid();plt.show()
```

   On observe :

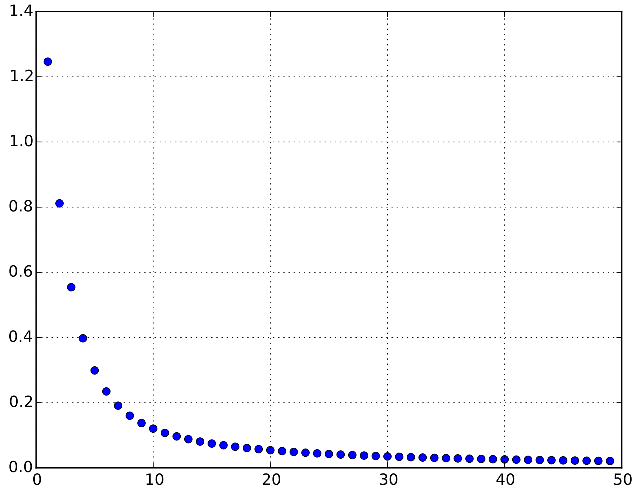


FIGURE 6 – Tracé de la suite $(\mathrm{I}_n)_n$

3. La suite $(\mathrm{I}_n)_n$ est clairement décroissante minorée par zéro donc convergente par limite monotone. Puis on a

$$\forall t \in \left]0\,;1\right[\qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

Comme φ est intégrable sur $\left[0\,;1\right[$, il s'ensuit par convergence dominée que

$$\boxed{\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

4. On saisit :

```
tnl=np.log(np.arange(100,1001))
tIl=[np.log(I(n)) for n in range(100,1001)]
plt.plot(tnl,tIl)
plt.grid();plt.show()
reglin=np.polyfit(tnl,tIl,1)
print("Régression linéaire :",reglin)
```

On observe :

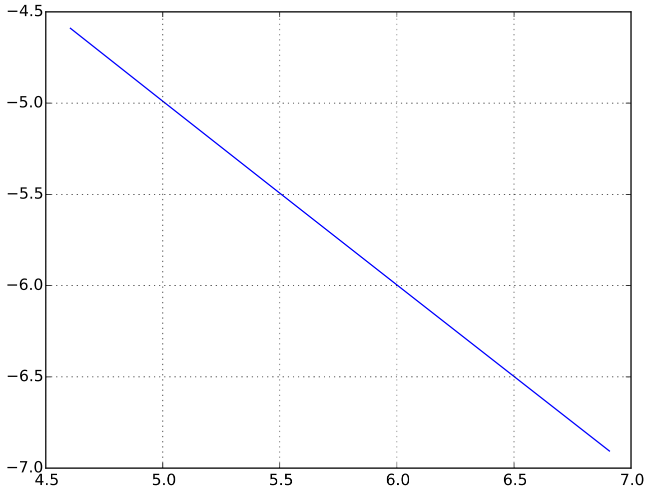


FIGURE 7 – Tracé des points $((\ln n, \ln \mathrm{I}_n))_n$

Les points semblent quasiment alignés. La régressions linéaire donne :

```
Régression linéaire : [-1.00458371  0.03211438]
```

On conjecture que $\boxed{\text{La suite } (n\mathrm{I}_n)_n \text{ est convergente.}}$

5. On saisit :

```
J=lambda n:integr.quad(lambda t:f(n,t),0,1/2)[0]
tJ=[n*J(n) for n in tn]
plt.plot(tn,tn*tI,'bo',tn,tJ,'ro')
plt.grid();plt.show()
```

On observe :

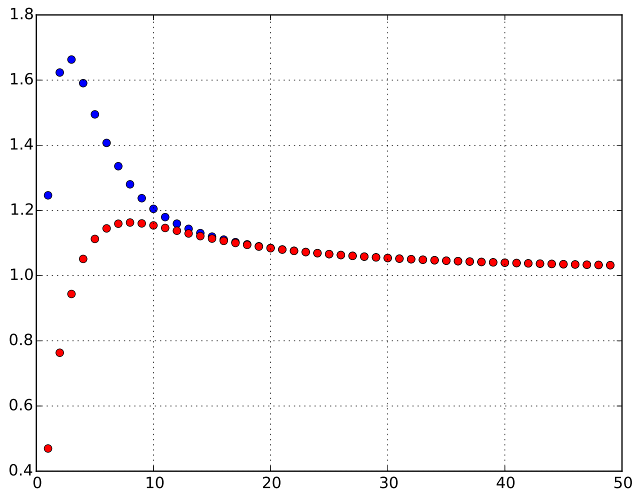


FIGURE 8 – Tracé des suites $(n\mathrm{I}_n)_n$ et $(n\mathrm{J}_n)_n$

On conjecture $\boxed{n\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad n\mathrm{J}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1}$

6. Soit n entier. D'après la relation de Chasles et par monotonie de $t \mapsto 1+t$, il vient

$$0 \leqslant n(\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_n) = n\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n\sqrt{1-t}} \leqslant \frac{n}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^n}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$$

Par encadrement $\boxed{n(\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

7. Par décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$, il vient

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \int_1^{1+x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \geqslant \int_1^{1+x} \frac{\mathrm{d}t}{1+x}$$

D'où $\boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad \ln(1+x) \geqslant \dfrac{x}{1+x}}$

8. Soit $n \geqslant 1$. Avec le changement de variable $u = nt$, on obtient

$$n \times \mathrm{J}_n = \int_0^{\frac{n}{2}} \left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u}{n}}}\,\mathrm{d}u$$

On pose

$$\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad g_n(u) = \left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u}{n}}} \times \mathbb{1}_{[\,0\,;\frac{n}{2}\,]}(u)$$

On a

$$\forall u \geqslant 0 \qquad g_n(u) = \exp\left[-n\ln\left(1+\frac{u}{n}\right)\right] \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u}{n}}} \times \mathbb{1}_{[\,0\,;\frac{n}{2}\,]}(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-u}$$

Soit $u \geqslant 0$. On pose $\quad \forall t \geqslant 1 \qquad \varphi_u(t) = -t\ln\left(1+\dfrac{u}{t}\right)$

La fonction φ_u est dérivable et on trouve

$$\forall t \geqslant 1 \qquad \varphi_u'(t) = -\ln\left(1+\frac{u}{t}\right) + \frac{u}{t} \times \frac{1}{1+\dfrac{u}{t}}$$

D'après le résultat de la question précédente, on a $\varphi_u'(t) \leqslant 0$ pour $t \geqslant 1$ d'où la décroissance de φ_u. Par suite

$$\forall n \geqslant 2 \qquad g_n(u) = \exp\left[\varphi_u(n)\right] \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u}{n}}} \times \mathbb{1}_{[\,0\,;\frac{n}{2}\,]}(u) \leqslant \exp\left[\varphi_u(2)\right] \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\left(1+\frac{u}{2}\right)^2}$$

La fonction du membre de droite de l'inégalité ci-dessus étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$, il vient par convergence dominée

$$\boxed{n\mathrm{J}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1}$$

Remarque : Si on essaye de procéder par convergence dominée directement sur la suite $(\mathrm{I}_n)_n$, ça ne fonctionne par car

$$\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u}{n}}}\times \mathbb{1}_{[0\,;n]}(u)\xrightarrow[u\to n]{}+\infty$$

Il n'y a donc aucun espoir de dominer une telle fonction d'où la nécessité de travailler sur $(\mathrm{J}_n)_n$.

9. Avec le résultat de la question 5, on conclut

$$\boxed{\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

Exercice 11 (Mines 2017)

Soit n entier non nul. Déterminer $\underset{\mathrm{M}\in\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Min}}\ \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^\top\mathrm{M})$.

Corrigé : Soit $\mathrm{M}\in\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\det(\mathrm{M})=1$. On a $\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, on dispose de $\mathrm{P}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ avec les $\lambda_i\geqslant 0$ telles que $\mathrm{M}^\top\mathrm{M}=\mathrm{PDP}^\top$. Par invariance par similitude, il vient $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^\top\mathrm{M})=\mathrm{Tr}\,(\mathrm{D})=\sum_{i=1}^n\lambda_i$ et par inégalité arithmético-géométrique, on obtient

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i\geqslant n\left(\prod_{i=1}^n\lambda_i\right)^{1/n}=n\det(\mathrm{D})^{1/n}=n\det(\mathrm{M}^\top\mathrm{M})^{1/n}=n$$

Ainsi $$\forall\mathrm{M}\in\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})\qquad\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^\top\mathrm{M})\geqslant n$$

et cette minoration est une égalité pour $\mathrm{M}=\mathrm{I}_n$. On conclut

$$\boxed{\underset{\mathrm{M}\in\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Min}}\ \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^\top\mathrm{M})=n}$$

Exercice 12 (Mines 2022)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$. Montrer que f est convexe si et seulement si f est limite uniforme de fonctions polynomiales convexes.

Corrigé : On suppose $a=0$ et $b=1$ pour commencer. On pose

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{B}_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

On a démontré, dans la preuve du théorème d'approximation de Weierstrass

$$\|\mathrm{B}_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Soit n entier non nul. La fonction $x \mapsto \mathrm{B}_n(f)(x)$ est polynomiale donc deux fois dérivable. Par dérivation, il vient pour $x \in [\,0\,;1\,]$

$$\mathrm{B}_n(f)'(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \left[k x^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k) x^k (1-x)^{n-k-1}\right]$$

On observe

$$\forall k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!] \qquad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \qquad (n-k)\binom{n}{k} = (n-k)\binom{n}{n-k} = n\binom{n-1}{n-1-k} = n\binom{n-1}{k}$$

Avec un changement d'indice, on trouve

$$\mathrm{B}_n(f)'(x) = n\sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k}$$

Puis

$$\mathrm{B}_n(f)''(x) = n\sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \binom{n-1}{k} \left[k x^{k}(1-x)^{n-1-k} - (n-1-k) x^k (1-x)^{n-2-k}\right]$$

On observe

$$\forall k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!] \qquad k\binom{n-1}{k} = (n-1)\binom{n-2}{k-1}$$

et $$(n-1-k)\binom{n-1}{k} = (n-1-k)\binom{n-1}{n-1-k} = (n-1)\binom{n-2}{n-2-k} = (n-1)\binom{n-2}{k}$$

Avec un changement d'indice, il vient

$$\mathrm{B}_n(f)''(x) = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} \left[f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{n-2-k}$$

On note $$\forall (u,v) \in [\,0\,;1\,]^2,\ u \neq v \qquad \tau(u,v) = \frac{f(u)-f(v)}{u-v}$$

Pour $k \in [\![\,0\,;\,n-2\,]\!]$, on a

$$f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) = \tau\left(\frac{k+2}{n}, \frac{k+1}{n}\right) - \tau\left(\frac{k+1}{n}, \frac{k}{n}\right)$$

Or, par convexité de f, la fonction τ croît et on en déduit $\mathrm{B}_n(f)'' \geqslant 0$ ce qui prouve la convexité des fonctions polynomiales $x \mapsto \mathrm{B}_n f(x)(x)$. On adapte pour a et b quelconques. On pose $g : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}, x \mapsto f\left(a + x(b-a)\right)$ puis $\mathrm{P}_n : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{B}_n(g)\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$ pour n entier non nul. La suite de fonctions polynomiales $(\mathrm{P}_n)_n$ est une suite de fonctions convexes qui converge uniformément vers f. La réciproque est immédiate et on conclut

$$\boxed{f \text{ est convexe si et seulement si } f \text{ est limite uniforme de fonctions polynomiales convexes}}$$

Exercice 13 (Mines-Telecom 2021)

Pour $n \geqslant 2$, on pose $\mathrm{P}_n = \mathrm{X}^n - n\mathrm{X} + 1$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, le polynôme P_n admet une unique racine $x_n \in [\,0\,;1\,]$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge et déterminer sa limite.
3. Déterminer α réel tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n}$.

Corrigé : 1. Soit $n \geqslant 2$. On a $\mathrm{P}_n(0) = 1$ et $\mathrm{P}_n(1) = 2 - n \leqslant 0$. La fonction polynomiale $x \mapsto \mathrm{P}_n(x)$ est dérivable avec

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{P}_n'(x) = n(x^{n-1} - 1) < 0$$

Ainsi, la fonction continue strictement décroissante $x \mapsto \mathrm{P}_n(x)$ réalise une bijection de $[\,0\,;1\,[$ sur $[\,2-n\,;1\,]$ et comme $0 \in [\,2-n\,;1\,]$, on conclut

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 2, \text{ le polynôme } \mathrm{P}_n \text{ admet une unique racine } x_n \in [\,0\,;1\,].}$$

2. On a $$\forall n \geqslant 2 \qquad 0 \leqslant n x_n = 1 + x_n^n \leqslant 2$$

d'où $$\forall n \geqslant 2 \qquad 0 \leqslant x_n \leqslant \frac{2}{n}$$

Par encadrement, il vient $$\boxed{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

3. On a $$\forall n \geqslant 2 \qquad 0 \leqslant x_n^n \leqslant x_n = \mathrm{o}(1)$$

Ainsi $$n x_n = 1 + x_n^n = 1 + \mathrm{o}(1)$$

On conclut $$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

Exercice 14 (Mines-Telecom 2023)

On pose $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On pose

$$\forall (f,x) \in \mathrm{E} \times [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{T}(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $\mathrm{T} \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E})$ et calculer $\|\mathrm{T}\|_{\mathrm{op}}$.

Corrigé : Soit $f \in \mathrm{E}$ et $x \in [\,0\,;1\,]$. L'intégrande $t \mapsto \min(x,t)f(t)$ est continu (par morceaux) sur le segment $[\,0\,;1\,]$ ce qui prouve que $\mathrm{T}(f)(x)$ est bien défini. L'application $\mathrm{T}(f)$ est linéaire par bilinéarité du produit et de l'intégrale. D'après la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{T}(f)(x) &= \int_0^x \min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'après le théorème fondamental d'intégration, les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ sont continues sur $[\,0\,;1\,]$ (de classe $\mathscr{C}^1$ en fait) et on en déduit que $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$. Puis, par inégalité triangulaire, il vient

$$\begin{aligned}|\mathrm{T}(f)(x)| &\leqslant \int_0^x t\,|f(t)|\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^x t\|f\|_\infty\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 \|f\|_\infty\,\mathrm{d}t \\ |\mathrm{T}(f)(x)| &\leqslant \left(\frac{x^2}{2} + x(1-x)\right)\|f\|_\infty\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + x(1-x) = \dfrac{x}{2}(2-x)$ atteint son maximum sur $[\,0\,;1\,]$ en $x=1$ et on obtient

$$\|\mathrm{T}(f)\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_\infty$$

ce qui prouve le caractère lipschitzien de $\mathrm{T}(f)$ en 0_{E}. Enfin, pour $f = \mathbb{1} \in \mathrm{E}$, il vient pour $x \in [\,0\,;1\,]$

$$|\mathrm{T}(f)(x)| = \int_0^x t\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 \mathrm{d}t = \frac{x}{2}(2-x)$$

d'où
$$\|\mathrm{T}(f)\|_\infty = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\|f\|_\infty$$

On conclut
$$\boxed{\mathrm{T} \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E}) \quad \text{et} \quad \|\mathrm{T}\|_{\mathrm{op}} = \frac{1}{2}}$$

Remarque : On aurait pu invoquer la continuité sous l'intégrale pour établir $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$ pour $f \in \mathrm{E}$ mais cette démarche demande un effort spécifique contrairement à l'approche présentée ci-avant.

Exercice 15 (Centrale 2021)

Soit $(\mathbb{K}, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{R}$-algèbre commutative, intègre, de dimension finie $n \geqslant 2$.

1. Soit a un élément non nul de $\mathbb{K}$. Pour $x \in \mathbb{K}$, on pose $f_a(x) = ax$. Montrer que f est un automorphisme linéaire de $\mathbb{K}$.
2. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que la famille $(1, a)$ est libre mais pas $(1, a, a^2)$.
3. Montrer que l'on peut trouver $\mathrm{i} \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. En déduire que $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}$.

Corrigé : 1. On rappelle que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un anneau et qu'on a

$$\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^2 \qquad (\lambda \cdot x)y = \lambda \cdot (xy) = x(\lambda \cdot y)$$

Ainsi

$$\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^2 \qquad f_a(x + \lambda y) = a(x + \lambda \cdot y) = ax + \lambda \cdot (ay) = f_a(x) + \lambda \cdot f_a(y)$$

Puis, par intégrité de $\mathbb{K}$, il vient

$$\forall x \in \mathbb{K} \qquad f_a(x) = 0 \iff ax = 0 \iff x = 0$$

L'application f_a est donc un endomorphisme injectif dans un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et par conséquent

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{K}^* \qquad f_a \in \mathrm{GL}(\mathbb{K})}$$

Remarque : On en déduit notamment que $\mathbb{K}$ est un corps puisque pour tout $a \in \mathbb{K}^*$, on dispose, par surjectivité de f_a, de $b \in \mathbb{K}$ tel que $f_a(b) = 1$, c'est-à-dire $ab = 1$.

2. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$. Ce choix est possible puisque $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$. La famille $(1, a)$ n'est pas liée, sans quoi on aurait a colinéaire à 1 puisque 1 est non nul, ce qui impliquerait a réel. La famille $\left(a^k\right)_{k \in [\![0\,;\,n]\!]}$ est une famille de $n+1$ vecteurs dans $\mathbb{K}$ qui est un $\mathbb{R}$-ev de dimension n. Il s'agit donc d'une famille liée d'où l'existence de $(\alpha_k)_{k \in [\![0\,;\,n]\!]} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{R}^{d+1}}\}$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{d} \alpha_k a^k = 0$. Ainsi, posant $\mathrm{R} = \sum\limits_{k=0}^{d} \alpha_k \mathrm{X}^k$, on a montré

$$\boxed{\text{Il existe un polynôme non nul } \mathrm{R} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \text{ tel que } \mathrm{R}(a) = 0.}$$

Considérant l'écriture de R comme produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on en déduit, par intégrité de $\mathbb{K}$, qu'il existe $\mathrm{P}_a \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ irréductible tel que $\mathrm{P}_a(a) = 0$. On a $\deg \mathrm{P}_a > 1$ par liberté de $(1, a)$ et comme les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ sont de degré 1 ou 2, on conclut $\deg \mathrm{P}_a = 2$ d'où

$$\boxed{\text{La famille } (1, a) \text{ est libre mais pas } (1, a, a^2).}$$

3. On peut choisir P_a unitaire. On note $\mathrm{P}_a = \mathrm{X}^2 + \alpha \mathrm{X} + \beta$ avec α, β réels tels que $\alpha^2 - 4\beta < 0$. Puis, il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_a(a) = 0 \iff a^2 + \alpha a + \beta = 0 &\iff \left(a + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \frac{4\beta - \alpha^2}{4} = 0 \\ &\iff \left(\frac{2}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}\left(a + \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

On pose
$$b = \frac{2}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}\left(a + \frac{\alpha}{2}\right)$$

L'élément b vérifie alors $b^2+1=0$. La famille $(1,b)$ est libre sans quoi b serait réel et on note $\mathrm{A}=\mathrm{Vect}\,(1,b)$. Montrons $\mathrm{A}=\mathbb{K}$. On procède par l'absurde en considérant $c\in\mathbb{K}\smallsetminus\mathrm{A}$. En particulier, on a $c\in\mathbb{K}\smallsetminus\mathbb{R}$ et en procédant comme pour la construction de b, on obtient l'existence de $d\in\mathrm{Vect}\,(1,c)$ tel que $d^2+1=0$. Il s'ensuit $d^2=b^2$ puis $(d-b)(d+b)=0$ par commutativité de $\mathbb{K}$ et par intégrité $d=b$ ou $d=-b$. Il en résulte que $b=\pm\,d=\lambda+\mu c$ avec λ,μ réels et $\mu\neq 0$ sinon b réel d'où $c\in\mathrm{Vect}\,(1,b)=\mathrm{A}$ ce qui est faux. On en déduit que $\mathbb{K}=\mathrm{Vect}\,(1,b)$. Enfin, on considère

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{K} \\ z \longmapsto \mathrm{Re}\,z + b\,\mathrm{Im}\,z \end{cases}$$

et on vérifie sans difficulté que φ est un isomorphisme d'algèbres. On conclut

$$\boxed{\text{La } \mathbb{R}\text{-algèbre } \mathbb{K} \text{ est isomorphe à } \mathbb{C}.}$$

Exercice 16 (Centrale 2022)

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Pour $r > 0$, on note $\mathrm{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < r\}$ et $\mathrm{S}_r = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = r\}$.

1. Montrer que K est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$. On choisit un $r > 0$ tel que $\mathrm{K} \subset \mathrm{B}_r$.

2. Établir $$\mathrm{Inf}\ \{\|u - v\|, (u, v) \in \mathrm{K} \times \mathrm{S}_r\} > 0$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijective, continue, fixant tous les points de $\mathbb{R}^n \smallsetminus \mathrm{B}_r$ et vérifiant $f(\mathrm{K}) \subset \mathrm{B}_\varepsilon$.

Corrigé : 1. C'est du cours ! (à refaire si l'examinateur l'exige)

2. L'application $(u, v) \mapsto \|u - v\|$ est continue sur $(\mathbb{R}^n)^2$ muni d'une norme produit. En effet, pour (u, v) et (u', v') dans $(\mathbb{R}^n)^2$, on a par inégalité triangulaire inverse

$$|\|u - v\| - \|u' - v'\|| \leqslant \|u - v - (u' - v')\| \leqslant \|u - u'\| + \|v - v'\|$$

Le produit $\mathrm{K} \times \mathrm{S}_r$ étant compact comme produit fini de compacts, il existe d'après le théorème des bornes atteintes $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathrm{S}_r$ tel que

$$\|a - b\| = \mathrm{Inf}\ \{\|u - v\|, (u, v) \in \mathrm{K} \times \mathrm{S}_r\}$$

On a $a \neq b$ puisque $\mathrm{K} \cap \mathrm{S}_r = \varnothing$ d'où $\|a - b\| > 0$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{Inf}\ \{\|u - v\|, (u, v) \in \mathrm{K} \times \mathrm{S}_r\} > 0}$$

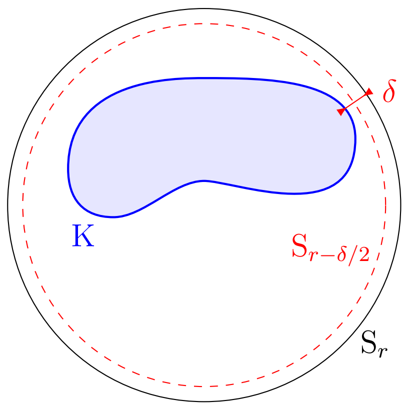
3. Si $\varepsilon \geqslant r$, l'identité fait l'affaire. Supposons $\varepsilon < r$. On note

$$\delta = \mathrm{Inf}\ \{\|u - v\|, (u, v) \in \mathrm{K} \times \mathrm{S}_r\} = \|a - b\| > 0$$

On a par inégalité triangulaire $$\delta \leqslant \underbrace{\|a\|}_{<r} + \underbrace{\|b\|}_{=r} < 2r$$

On en déduit $r - \delta/2 > 0$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } \|x\| \geqslant r \\ \dfrac{\varepsilon}{r - \delta/2} x & \text{si } \|x\| < r - \delta/2 \\ x\left(\varepsilon + \dfrac{r - \varepsilon}{\delta/2}(\|x\| - (r - \delta/2)\right) & \text{si } r - \delta/2 \leqslant \|x\| < r \end{cases}$$



L'application f fixe $\mathbb{R}^n \smallsetminus \mathrm{B}_r$ par définition. On a $\mathrm{K} \subset \mathrm{B}_{r-\delta/2}$. En effet, considérons $x \in \mathrm{K}$ et supposons $\|x\| \geqslant r - \delta/2$. On pose $y = r\dfrac{x}{\|x\|}$ qui est sur la sphère S_r. On a

$$\|x-y\| = \|x - r\frac{x}{\|x\|}\| = \|x\| \left|1 - \frac{r}{\|x\|}\right| = |\|x\| - r| = r - \|x\| \leqslant \frac{\delta}{2} < \delta$$

ce qui est absurde. Il s'ensuit $\|x\| < r - \delta/2$ d'où l'inclusion annoncée. Comme on a clairement $f(\mathrm{B}_{r-\delta/2}) \subset \mathrm{B}_\varepsilon$, il en résulte en particulier $f(\mathrm{K}) \subset \mathrm{B}_\varepsilon$. L'application f est continue sur chacune des zones où elle est définie explicitement et le raccord entre les zones est également continu (vérification laissé au bon soin du lecteur). Enfin, on vérifie que pour $y \in \mathbb{R}^n$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^n$ admet une unique solution. C'est clair si $\|y\| \geqslant r$ ou $\|y\| < r - \delta/2$. Sinon, on résout

$$y = x\left(\varepsilon + \frac{r-\varepsilon}{\delta/2}\left(\|x\| - (r-\delta/2)\right)\right)$$

Passant à la norme, on trouve

$$\frac{r-\varepsilon}{\delta/2}\|x\|^2 + \left(\varepsilon - \frac{r-\varepsilon}{\delta/2}(r-\delta/2)\right)\|x\| - \|y\| = 0$$

C'est une équation de degré 2 en $\|x\|$ de discriminant strictement positif qui admet deux racines distinctes de signes opposés car le terme constant est négatif. Il y a donc une unique solution pour $\|x\| \geqslant 0$ et en injectant dans l'équation précédente, on en déduit un unique antécédent x à l'équation $f(x) = y$. On conclut

$$\boxed{\text{Il existe } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ bijective, continue, fixant tous les points de } \mathbb{R}^n \smallsetminus \mathrm{B}_r \text{ et vérifiant } f(\mathrm{K}) \subset \mathrm{B}_\varepsilon}$$

Exercice 17 (Centrale 2016)

Soit n entier non nul et

$$\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

et χ_n son polynôme caractéristique.

1. Écrire un fonction `A(n)` d'argument n entier non nul et qui renvoie A_n.
2. Pour n entier avec $n \geqslant 2$, relier χ_n et χ_{n-1}.
3. On pose $$\forall n \geqslant 2 \qquad \mathrm{F}_n = \frac{\chi_n}{\prod\limits_{k=2}^{n}(\mathrm{X}-k)}$$
   Calculer la décomposition en éléments simples F_n et en déduire une expression non factorisée de χ_n.
4. Justifier que pour n entier non nul, on a $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}_n) \subset \mathbb{R}$.
5. Écrire une fonction `L(n)` d'argument n entier non nul et qui renvoie $\lambda_n = \max \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}_n)$.
6. Représenter les termes de la suite $(\lambda_n)_{n \in [\![2\,;10]\!]}$.
7. Déterminer un équivalent simple de λ_n pour $n \to +\infty$ et le vérifier par simulation.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def A(n):
    res=np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        res[i,0]=1
        res[0,i]=1
        res[i,i]=i+1
    return res
```

2. Soit n entier avec $n \geqslant 2$. En développant sur la dernière colonne, on obtient

$$\chi_n = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} -1 & \mathrm{X}-2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \mathrm{X}-n+1 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}_{[n-1]} + (\mathrm{X}-n)\chi_{n-1}$$

En développant le déterminant d'ordre $n-1$ sur la dernière ligne, il vient

$$\boxed{\chi_n = -\prod_{k=2}^{n-1}(\mathrm{X}-k) + (\mathrm{X}-n)\chi_{n-1}}$$

3. Soit n entier avec $n \geqslant 2$. On a

$$\mathrm{F}_n = \frac{\chi_n}{\prod\limits_{k=2}^{n}(\mathrm{X}-k)} = -\frac{1}{\mathrm{X}-n} + \frac{\chi_{n-1}}{\prod\limits_{k=2}^{n-1}(\mathrm{X}-k)} = -\frac{1}{\mathrm{X}-n} + \mathrm{F}_{n-1}$$

En fixant $\mathrm{F}_1 = \chi_1 = \mathrm{X}-1$, on obtient par récurrence immédiate

$$\boxed{\mathrm{F}_n = \mathrm{X} - 1 - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\mathrm{X}-k} \quad \text{et} \quad \chi_n = \prod_{k=1}^{n}(\mathrm{X}-k) + \sum_{k=2}^{n}\prod_{i\in[\![2\,;\,n]\!]\smallsetminus\{k\}}(\mathrm{X}-i)}$$

Remarque : On peut court-circuiter les questions du sujet et déterminer directement χ_n. Pour $x \in \mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{N}$, on a

$$\chi_n(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & x-2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & x-n \end{vmatrix}$$

Avec l'opération $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \sum\limits_{i=2}^{n}\frac{\mathrm{L}_i}{x-i}$, il vient

$$\chi_n(x) = \begin{vmatrix} x-1-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{x-i} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & x-2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & x-n \end{vmatrix} = \left(x-1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x-i}\right)\prod_{i=2}^{n}(x-i)$$

En distribuant le produit, on obtient une égalité entre deux expressions polynomiales pour une infinité de valeurs. Le résultat suit.

4. Pour n entier non nul, la matrice A_n est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral. On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}_n) \subset \mathbb{R}}$$

5. On saisit :

```
def L(n):
    return max(alg.eigvals(A(n)))
```

6. On saisit :

```
tn=range(2,11)
tL=[L(n) for n in tn]
plt.plot(tn,tL,'bo--')
plt.grid();plt.show()
```

On observe :

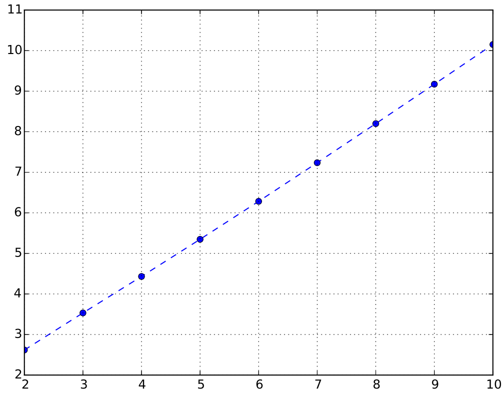


FIGURE 9 – Tracé de la suite $(\lambda_n)_n$

On conjecture $$\boxed{\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n}$$

7. Soit n entier avec $n \geqslant 2$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\, n \qquad f_n(x) = x - 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x-k}$$

La fonction f_n est croissante comme somme de telles fonctions. Pour tout $k \in [\![2\,;\, n]\!]$, on a

$$f_n(x) \xrightarrow[x\to k^-]{} +\infty \quad \text{et} \quad f_n(x) \xrightarrow[x\to k^+]{} -\infty$$

et aussi $$f_n(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} -\infty \quad \text{et} \quad f_n(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{}$$

On en déduit que f_n s'annule sur $]-\infty\,;2\,[$, $]\,2\,;3\,[$, $\ldots$, $]\,n-1\,;n\,[$ et $]\,n\,;+\infty\,[$ d'où n racines distinctes pour f_n et comme on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\, n \qquad f_n(x) = \frac{\chi_n(x)}{\prod_{k=2}^{n}(x-k)}$$

on en déduit qu'il s'agit exactement des racines du polynôme χ_n qui est de degré n. Par ailleurs, on a

$$\chi_n(n+1) = n+1-1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n+1-k} = n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \geqslant n - \sum_{k=1}^{n-1} 1 = n-(n-1) = 1 > 0$$

On en déduit $$\lambda_n \in \,]\,n\,;n+1\,[$$

On conclut $$\boxed{\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n}$$

Remarque : On peut sans trop d'effort améliorer ce résultat en établissant un développement asymptotique à deux termes. On a

$$\chi_n(\lambda_n) = 0 \iff \lambda_n - 1 = \frac{1}{\lambda_n - n} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\lambda_n - k}$$

Puis $$n < \lambda_n < n+1 \implies \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{n+1-k} < \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\lambda_n - k} < \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{n-k}$$
$$\implies \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\lambda_n - k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$$

On en déduit $$\lambda_n - 1 = \frac{1}{\lambda_n - n} + \mathrm{o}(\lambda_n)$$

d'où $$\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\lambda_n - n}$$

Par suite $$\lambda_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\lambda_n}$$

Et on conclut $$\boxed{\lambda_n = n + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

On saisit :

```
tn=range(2,100)
tD=[n*(L(n)-n) for n in tn]
plt.plot(tn,tD,'bo--')
plt.grid();plt.show()
```

On observe :

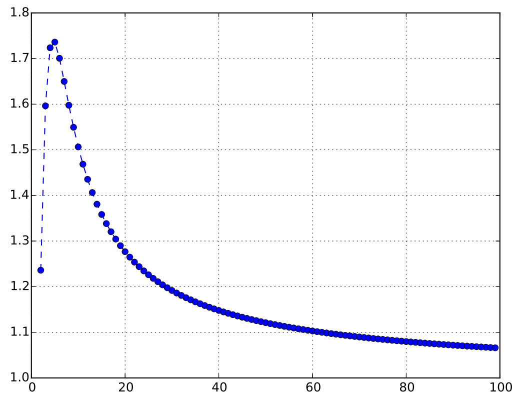


FIGURE 10 – Tracé de la suite $(n(\lambda_n - n))_n$

Exercice 18 (Centrale 2019)

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$. On note

$$(*) : \quad \varphi(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

$$(**) : \quad \forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \mathrm{rg}\,(\varphi(\mathrm{M})) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{M})$$

1. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer
$$\mathrm{M} \text{ nilpotente} \iff \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{I}_n - \lambda\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$
2. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que φ vérifie $(*)$. Montrer
$$\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \iff \varphi(\mathrm{M}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$
3. Établir $\qquad (*) \implies (**)$

Corrigé : 1. On a

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{I}_n - \lambda\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\iff \forall \lambda \in \mathbb{C}^* \qquad \lambda^{-1}\mathrm{I}_n - \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\\
&\iff \forall \lambda \in \mathbb{C}^* \qquad \chi_{\mathrm{M}}(\lambda^{-1}) \neq 0\\
\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{I}_n - \lambda\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\iff \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}) = \{0\}
\end{aligned}$$

D'où $\qquad \boxed{\mathrm{M} \text{ nilpotente} \iff \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad (\mathrm{I}_n - \lambda\mathrm{M}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$

2. Soit $\mathrm{M} \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $r = \mathrm{rg}\,\mathrm{M}$. On note $\mathrm{K}_r = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{I}_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. On a $\mathrm{rg}\,\mathrm{K}_r = r$ et comme des matrices de même rang sont équivalentes, on dispose de A et B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{M} = \mathrm{AK}_r\mathrm{B}$. On pose $\mathrm{P} = \mathrm{AB}$. On a $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{K}_r\mathrm{B}$ semblable à K_r donc nilpotente d'où

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{I}_n - \lambda\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

Multipliant par la matrice inversible P à gauche, on obtient

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{P} - \lambda\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

Ainsi, on a $\varphi(\mathrm{P} - \lambda\mathrm{M}) = \varphi(\mathrm{P}) - \lambda\varphi(\mathrm{M})$ inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\varphi(\mathrm{P})$ inversible d'où, multipliant à gauche par $\varphi(\mathrm{P})^{-1}$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{I}_n - \lambda\varphi(\mathrm{P})^{-1}\varphi(\mathrm{M}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

ce qui prouve $\varphi(\mathrm{P})^{-1}\varphi(\mathrm{M})$ nilpotente donc non inversible. Il en résulte que $\varphi(\mathrm{M})$ n'est pas inversible et on conclut

$$\boxed{\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \iff \varphi(\mathrm{M}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$$

3. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $\mathrm{rg}\,\mathrm{M} = r < n$. On dispose de A, B inversibles telles que $\mathrm{M} = \mathrm{AJ}_r\mathrm{B}$. On pose $\mathrm{Q} = \mathrm{ADB}$ avec $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)$. On a $\mathrm{Q} - \lambda\mathrm{M} = \mathrm{A}(\mathrm{D} - \lambda\mathrm{J}_r)\mathrm{B}$ non inversible pour $\lambda \in [\![1\,; r]\!]$ d'où $\varphi(\mathrm{Q}) - \lambda\varphi(\mathrm{M})$ non inversible pour $\lambda \in [\![1\,; r]\!]$, autrement dit $\lambda^{-1}\mathrm{I}_n - \varphi(\mathrm{Q})^{-1}\varphi(\mathrm{M})$ non inversible pour $\lambda \in [\![1\,; r]\!]$ ce qui prouve que $\varphi(\mathrm{Q})^{-1}\varphi(\mathrm{M})$ admet r valeurs propres distinctes non nulles d'où $\mathrm{rg}\,\varphi(\mathrm{M}) \geqslant r$. L'inégalité vaut aussi si $r = n$ et on a donc établi

$$\boxed{\mathrm{rg}\,\varphi(\mathrm{M}) \geqslant \mathrm{rg}\,\mathrm{M}}$$

Ainsi, l'endomorphisme φ est donc injectif et est par conséquent un automorphisme. Il s'ensuit que l'équivalence établie à la deuxième question vaut aussi pour φ^{-1} et l'inégalité précédente appliquée à φ^{-1} permet de conclure

$$\boxed{(*) \implies (**)}$$

Exercice 19 (Mines-Telecom 2021)

Pour x réel, on pose $\quad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad$ et $\quad \mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F et G sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour x réel, déterminer $\mathrm{F}'(x)$ en fonction de $\mathrm{G}(x)$ et $\mathrm{G}'(x)$.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : 1. On pose

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \forall t \geqslant 0 \qquad g(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$$

avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} = [\,0\,;1\,]$. La fonction G est une primitive de la fonction continue g. Puis, on vérifie :
- Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et intégrable sur le segment I.
- Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X},\mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2x\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}$$

- Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$.
- Domination : Soit $a > 0$. On a

$$\forall (x,t) \in [\,-a\,;a\,]\times\mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2a$$

et $t \mapsto 2a$ est continue par morceaux et intégrable sur le segment I. La fonction F est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,-a\,;a\,]$ pour tout $a > 0$ et par conséquent

$$\boxed{\text{Les fonctions F et G sont de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Remarque : On a $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2\,|x|\,\mathrm{e}^{-x^2}$

et par une étude de fonctions, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2\,|x|\,\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

ce qui permet de faire une domination globale (luxe inutile...).

2. Par dérivation, on trouve pour x réel

$$\mathrm{F}'(x) + (\mathrm{G}^2)'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}t + 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $u = xt$ (pour $x \neq 0$) dans la première intégrale permet d'obtenir

$$\boxed{\mathrm{F}' + (\mathrm{G}^2)' = 0}$$

Remarque : L'égalité vaut trivialement en $x = 0$.

3. La fonction $\mathrm{F} + \mathrm{G}^2$ de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est donc constante. Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\mathrm{F}+\mathrm{G}^2)(x) = (\mathrm{F}+\mathrm{G}^2)(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Par ailleurs, on a $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$

D'où, après intégration $\qquad \forall x \in \mathrm{X} \qquad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$

et par encadrement $\qquad \mathrm{F}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Ainsi $\qquad \mathrm{G}(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{o}(1)}$

On conclut $\qquad \boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

Exercice 20 (Mines-Telecom 2021)

Soit $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{S}) \subset \,]\,0\,;+\infty\,[$. Pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on pose

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{Y}_k = \frac{\mathrm{S}^k\mathrm{X}}{\|\mathrm{S}^k\mathrm{X}\|}$$

Justifier que la suite $(\mathrm{Y}_k)_k$ est bien définie puis montrer qu'elle converge vers un vecteur propre de S.

Corrigé : D'après le théorème spectral, on a

$$\mathrm{E} = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)}} \mathrm{E}_\lambda(u)$$

Par une récurrence immédiate, pour $x = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} x_\lambda$ avec $x_\lambda \in \mathrm{E}_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad u^k(x) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \lambda^k x_\lambda$$

Pour $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, on pose

$$\Lambda_x = \{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \mid x_\lambda \neq 0_\mathrm{E}\} \quad \text{et} \quad \alpha_x = \max \Lambda_x$$

Soit $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$. Par définition de Λ_x, on a

$$x = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} x_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda_x} x_\lambda = x_{\alpha_x} + \sum_{\lambda \in \Lambda_x \setminus \{\alpha_x\}} x_\lambda$$

Ainsi $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad u^k(x) = \alpha_x^k x_{\alpha_x} + \sum_{\lambda \in \Lambda_x \setminus \{\alpha_x\}} \lambda^k x_\lambda$$

Soit $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$. Comme $u \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$, la valeur propre α_x est strictement positive et on a

$$\forall \lambda \in \Lambda_x \setminus \{\alpha_x\} \qquad 0 < \lambda < \alpha_x$$

d'où $$\forall \lambda \in \Lambda_x \setminus \{\alpha_x\} \qquad \left(\frac{\lambda}{\alpha_x}\right)^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

Par conséquent $$\frac{1}{\alpha_x^k} u^k(x) = x_{\alpha_x} + \sum_{\lambda \in \Lambda_x \setminus \{\alpha_x\}} \left(\frac{\lambda}{\alpha_x}\right)^k x_\lambda \xrightarrow[k \to +\infty]{} x_{\alpha_x}$$

L'endomorphisme u est un automorphisme d'où u^k également pour tout k entier. Ainsi, pour $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, on a $u^k(x) \neq 0_\mathrm{E}$ et par conséquent

La suite $(x_k)_k$ est bien définie.

On pose $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad v_k = \frac{1}{\alpha_x^k} u^k(x)$$

On obtient $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad x_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}$$

D'après le résultat de la question 4 et la continuité de la norme, on conclut

$$\boxed{x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{x_{\alpha_x}}{\|x_{\alpha_x}\|} \in \mathrm{E}_{\alpha_x}(u)}$$

Remarque : Il s'agit d'une déclinaison pour un endomorphisme symétrique défini positif de *la méthode de la puissance itérée.*

Exercice 21 (Mines 2023)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_n$ une suite i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre $1/2$.

1. Déterminer la loi de $Z_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} X_k$.
2. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n \geqslant 3^n)$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n \geqslant 2^n)$.

Corrigé : 1. Soit n entier. On sait que tout entier de $[\![0\,; 2^{n+1}-1]\!]$ possède une unique écriture binaire de la forme $\sum_{k=0}^{n} d_k 2^k$ avec les $d_k \in \{0,1\}$ ou, de manière équivalente, de la forme $\sum_{k=0}^{n} x_k 2^{n-k}$ avec les $x_k \in \{0,1\}$. Ainsi, par indépendance des X_k, on a pour $(x_0,\ldots,x_n) \in \{0,1\}^{n+1}$

$$\mathbb{P}\left(Z_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} x_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} \{X_k = x_k\}\right) = \prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

On conclut $$\boxed{Z_n \sim \mathscr{U}_{[\![0\,;\,2^{n+1}-1]\!]}}$$

2. Soit n entier. On a

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} k\mathbb{P}(Z_n = k) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{(2^{n+1}-1)2^{n+1}}{2} = \frac{1}{2}(2^{n+1}-1)$$

La variable aléatoire Z_n est positive et d'après l'inégalité de Markov, il vient

$$\mathbb{P}(Z_n \geqslant 3^n) \leqslant \frac{1}{3^n}\mathbb{E}(Z_n) = \frac{1}{2\times 3^n}(2^{n+1}-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

D'où $$\boxed{\mathbb{P}(Z_n \geqslant 3^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Puis, on a $$\{X_n = 0\} = \left\{Z_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} = 2^n - 1\right\} = \{Z_n < 2^n\}$$

Ainsi $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(Z_n \geqslant 2^n) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}}$$

Remarque : Demander la limite d'une suite constante est un peu déroutant…

Exercice 22 (Centrale 2021)

Soit n entier non nul et $\mathrm{A}_n = \left(\mathrm{X}_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes. On note $\mathrm{D}_n = \det \mathrm{A}_n$.

1. Avec l'outil informatique, estimer les valeurs de $\mathbb{E}(\mathrm{D}_n)$ et $\mathbb{V}(\mathrm{D}_n)$ pour différentes valeurs de n lorsque les $\mathrm{X}_{i,j}$ sont i.i.d. de loi $\mathscr{U}_{\{-1,1\}}$. Que peut-on conjecturer ?
2. Montrer ces conjectures pour $n = 1$ et $n = 2$.
3. Établir
$$\mathbb{E}(\mathrm{D}_n) = \det \left(\mathbb{E}(\mathrm{X}_{i,j})\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$
4. Soit x réel. Calculer $\mathbb{E}(\chi_{\mathrm{A}_n}(x))$ dans le cas où les $\mathrm{X}_{i,j}$ ont la même loi.
5. On suppose les $\mathrm{X}_{i,j}$ centrées réduites.
   (a) Soient σ et τ deux permutations de $[\![1\,;\, n]\!]$. Montrer
$$\operatorname{Cov}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}, \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\tau(i),i}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   (b) Calculer $\mathbb{V}(\mathrm{D}_n)$.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def A(n):
    return 2*rd.randint(0,2,(n,n))-1

N=10000
for n in range(1,6):
    m1=0
    m2=0
    for k in range(N):
        D=alg.det(A(n))
        m1+=D
        m2+=D**2
    print("n=",n)
    print("E(D_n)=",m1/N)
    print("V(D_n)=",m2/N-(m1/N)**2)
    print()
```

On observe :

```
n= 1
E(D_n)= -0.002
V(D_n)= 0.999996

n= 2
E(D_n)= -0.0206
V(D_n)= 1.98717564

n= 3
E(D_n)= -0.0312
V(D_n)= 6.06942656
```

```
n= 4
E(D_n)= -0.036
V(D_n)= 24.030703999999997

n= 5
E(D_n)= -0.15359999999999996
V(D_n)= 119.32360703999997
```

On conjecture $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{E}(\mathrm{D}_n) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\mathrm{D}_n) = n!}$

2. Pour $n = 1$, on a $\mathrm{D}_1 = \mathrm{X}_{1,1}$ d'où $\mathbb{E}(\mathrm{D}_1) = 0$ puis $\mathbb{V}(\mathrm{D}_1) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_{1,1}^2) = \mathbb{E}(1) = 1$. Pour $n = 2$, on a $\mathrm{D}_2 = \mathrm{X}_{1,1}\mathrm{X}_{2,2} - \mathrm{X}_{1,2}\mathrm{X}_{2,1}$ puis par linéarité de l'espérance et indépendance des $\mathrm{X}_{i,j}$

$$\mathbb{E}(\mathrm{D}_2) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_{1,1}\mathrm{X}_{2,2} - \mathrm{X}_{1,2}\mathrm{X}_{2,1}) = \ldots = 0$$

Puis $$\mathbb{V}(\mathrm{D}_2) = \mathbb{V}(\mathrm{X}_{1,1}\mathrm{X}_{2,2} - \mathrm{X}_{1,2}\mathrm{X}_{2,1}) = \mathbb{V}(\mathrm{X}_{1,1}\mathrm{X}_{1,2}) + \mathbb{V}(\mathrm{X}_{1,2}\mathrm{X}_{2,1})$$

avec $$\mathbb{V}(\mathrm{X}_{1,1}\mathrm{X}_{1,2}) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_{1,1}^2\mathrm{X}_{1,2}^2) - \mathbb{E}(\mathrm{X}_{1,1}\mathrm{X}_{2,2}) = 1$$

et de même pour l'autre terme. On conclut

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{D}_1) = 0 \qquad \mathbb{V}(\mathrm{D}_1) = 2 \qquad \mathbb{E}(\mathrm{D}_2) = 0 \qquad \mathbb{V}(\mathrm{D}_2) = 2}$$

3. On a $$\mathrm{D}_n = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}$$

Par linéarité de l'espérance, il vient

$$\mathbb{E}(\mathrm{D}_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma)\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}\right)$$

Par indépendance des $\mathrm{X}_{i,j}$, on trouve

$$\mathbb{E}(\mathrm{D}_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{X}_{\sigma(i),i})$$

On conclut $$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{D}_n) = \det\left(\mathbb{E}(\mathrm{X}_{i,j})\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}}$$

4. Soit x réel. On a $\chi_{\mathrm{A}_n}(x) = \det(x\mathrm{I}_n - \mathrm{A}_n) = \sum\limits_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n} \left(x\delta_{\sigma(i),i} - \mathrm{X}_{\sigma(i),i}\right)$

d'où $$\mathbb{E}(\chi_{\mathrm{A}_n}(x)) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(x\delta_{\sigma(i),i} - \mathbb{E}(\mathrm{X}_{\sigma(i),i})\right)$$

Notant $\mu = \mathbb{E}(\mathrm{X}_{i,j})$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,; n]\!]^2$ et J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, on trouve

$$\mathbb{E}(\chi_{\mathrm{A}_n}(x) = \det(x\mathrm{I}_n - \mu\mathrm{J})$$

On effectue les opérations $\mathrm{C}_1 \leftarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{C}_i$ puis $\mathrm{C}_j \leftarrow \mathrm{C}_j + \mu\mathrm{C}_1$ et on obtient

$$\boxed{\mathbb{E}(\chi_{\mathrm{A}_n}(x)) = x^{n-1}(x - n\mu)}$$

5.(a) Soit $(\sigma, \tau) \in \mathrm{S}_n^2$. On a par indépendance

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{X}_{\sigma(i),i}) = 0$$

Ainsi, d'après le relation de König-Huygens, il vient

$$\mathrm{Cov}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}, \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\tau(i),i}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\tau(i),i}\right)$$

Si $\sigma \neq \tau$, il existe $i_0 \in [\![1\,;\,n]\!]$ tel que $\sigma(i_0) \neq \tau(i_0)$ d'où

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}\mathrm{X}_{\tau(i),i}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{\sigma(i_0),i_0}\mathrm{X}_{\tau(i_0),i_0} \prod_{i\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i_0\}} \ldots\right) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_{\sigma(i_0),i_0}) \times \ldots = 0$$

Si $\sigma = \tau$, on a
$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}^2\right) = \mathbb{E}(1) = 1$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\mathrm{D}_n) &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}, \sum_{\tau\in\mathrm{S}_n} \varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\tau(i),i}\right)\\ &= \sum_{(\sigma,\tau)\in\mathrm{S}_n^2} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\mathrm{Cov}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}, \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\tau(i),i}\right) = \sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma)^2 = \mathrm{Card}\ \mathrm{S}_n\end{aligned}$$

On conclut
$$\boxed{\mathbb{V}(\mathrm{D}_n) = n!}$$

Exercice 23 (Mines-Telecom 2021)

Soient X, Y, Z des variables aléatoires indépendantes de même loi binomiale de paramètres n entier non nul et $p \in]\,0\,;1\,[$. On pose

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathrm{M}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathrm{X}(\omega) & \mathrm{X}(\omega) & \mathrm{X}(\omega) \\ \mathrm{Y}(\omega) & \mathrm{Y}(\omega) & \mathrm{Y}(\omega) \\ \mathrm{Z}(\omega) & \mathrm{Z}(\omega) & \mathrm{Z}(\omega) \end{pmatrix}$$

1. À l'aide de fonctions génératrices, montrer que $\mathrm{S} = \mathrm{X} + \mathrm{Y} + \mathrm{Z}$ suit une loi binomiale et préciser son espérance et sa variance.
2. Déterminer une expression simple de M^2 en fonction de M et S.
3. Calculer la probabilité que M soit un projecteur.

Corrigé : 1. Soit $t \in [\,0\,;1\,]$. Par indépendance, il vient

$$\mathrm{G_S}(t) = \mathrm{G_X}(t)\mathrm{G_Y}(t)\mathrm{G_Z}(t) = (pt + 1 - p)^{3n}$$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on conclut

$$\boxed{\mathrm{S} \sim \mathscr{B}(3n, p) \qquad \mathbb{E}(\mathrm{S}) = 3np \qquad \mathbb{V}(\mathrm{S}) = 3np(1-p)}$$

2. On observe $\qquad \mathrm{M} = \mathrm{CU}^\top \quad \text{avec} \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Par associativité du produit matriciel, il vient

$$\mathrm{M}^2 = \mathrm{C}\left(\mathrm{U}^\top \mathrm{C}\right)\mathrm{U}^\top = (\mathrm{X} + \mathrm{Y} + \mathrm{Z})\mathrm{CU}^\top$$

On conclut $\qquad \boxed{\mathrm{M}^2 = \mathrm{SM}}$

3. On a

$$\{\mathrm{M}\ \text{projecteur}\} = \{\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}\} = \{\mathrm{SM} = \mathrm{M}\} = \{\mathrm{M} = 0\} \sqcup \{\mathrm{M} \neq 0, \mathrm{S} = 1\} = \{\mathrm{S} = 0\} \sqcup \{\mathrm{S} = 1\}$$

Ainsi $\qquad \mathbb{P}\left(\mathrm{M}\ \text{projecteur}\right) = \mathbb{P}(\mathrm{S} = 0) + \mathbb{P}(\mathrm{S} = 1)$

On conclut $\qquad \boxed{\mathbb{P}\left(\mathrm{M}\ \text{projecteur}\right) = (1-p)^{3n} + 3np(1-p)^{3n-1}}$

Exercice 24 (Mines-Telecom 2022)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction k-lipschitzienne avec $k \in [\,0\,;1\,[$.

1. Montrer que la fonction f admet un point fixe.
2. Montrer que ceci est faux si on suppose seulement

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{avec} \quad x \neq y \qquad |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

Corrigé : 1 . Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On pose $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout n entier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad |x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leqslant k\,|x_n - x_{n-1}|$$

et par récurrence $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |x_{n+1} - x_n| \leqslant k^n\,|x_1 - x_0|$

La série $\sum k^n$ converge d'où la convergence absolue et donc la convergence de la série téléscopique $\sum [x_{n+1} - x_n]$. On en déduit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et comme la fonction f est continue, il vient en faisant tendre $n \to +\infty$ dans la relation $x_{n+1} = f(x_n)$ l'égalité $f(\ell) = \ell$. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un point fixe.}}$$

2. On pose $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \sqrt{x^2+1}$

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x \neq y$. On a

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1} = \frac{x^2+1-(y^2+1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}$$

d'où $$|f(x) - f(y)| = |x-y|\,\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}} < |x-y|\,\frac{|x|+|y|}{|x|+|y|}$$

c'est-à-dire $$|f(x) - f(y)| < |x-y|$$

et la fonction f n'admet clairement pas de point fixe. On conclut

$$\boxed{\text{Le résultat est faux en supposant seulement strictement 1-lipschitzienne.}}$$

Exercice 25 (Mines-Telecom 2023)

Pour x réel, on pose $$\mathrm{F}(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{Arctan}\,(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple de $\mathrm{F}(x)$ pour x réel.

Corrigé : 1. L'intégrande est impaire et on va donc se restreindre à l'étude sur $\mathbb{R}_+$. On pose

$$\forall (x,t)\in \mathrm{X}\times\mathrm{I}\qquad f(x,t)=\frac{\mathrm{Arctan}\,(xt)}{t(1+t^2)}$$

avec $\mathrm{X}=\mathbb{R}_+$ et $\mathrm{I}=\,]\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale.

- Pour $x\in\mathrm{X}$, on a $t\mapsto f(x,t)\in\mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Puis, on a

$$f(x,t)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{xt}{t}\xrightarrow[t\to 0]{}x\quad\text{et}\quad f(x,t)\underset{t\to+\infty}{=}\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui prouve l'intégrabilité de $t\mapsto f(x,t)$ sur I.
- Pour $t\in\mathrm{I}$, on a $x\mapsto f(x,t)\in\mathscr{C}^1(\mathrm{X},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t)\in \mathrm{X}\times\mathrm{I}\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

- Pour $x\in\mathrm{X}$, on a $t\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\in\mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- **Domination :** On a

$$\forall (x,t)\in \mathrm{X}\times\mathrm{I}\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\varphi(t)\quad\text{avec}\quad\varphi(t)=\frac{1}{1+t^2}$$

La fonction φ est dans $\mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R}_+)$, intégrable sur I puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=[\mathrm{Arctan}\,t]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$.
Par imparité, on étend le résultat sur $\mathbb{R}$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{F}\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

2. Soit $x\geqslant 0$ et $x\neq 1$. Par décomposition en éléments simples, on trouve

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}=\frac{1}{1-x^2}\left[\frac{1}{1+t^2}-\frac{x^2}{1+x^2t^2}\right]$$

On suppose également $x\neq 0$ pour l'intégration du second membre. Il vient

$$\mathrm{F}'(x)=\frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{1+t^2}-\frac{x^2}{1+x^2t^2}\right]\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1-x^2}\frac{\pi}{2}(1-x)=\frac{\pi}{2(1+x)}$$

La formule vaut aussi pour $x=0$. Par ailleurs, comme F' est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a $\mathrm{F}'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\mathrm{F}'(x)$ et par conséquent

$$\boxed{\forall x\geqslant 0\qquad \mathrm{F}'(x)=\frac{\pi}{2(1+x)}}$$

Par intégration, il vient

$$\forall x\geqslant 0\qquad \mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(0)+\int_0^x\mathrm{F}'(u)\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\ln(1+x)$$

En complétant par imparité de F, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-x) & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}}$$

Remarque : Pour faire efficacement la décomposition en éléments simples, on peut considérer

$$\frac{1}{(1+u)(1+x^2u)} = \frac{x^2u+1-x^2(u+1)}{(1+u)(1+x^2u)}\frac{1}{1-x^2}$$

et l'appliquer en $u = t^2$.

Exercice 26 (Mines-Telecom 2023)

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des couples $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $(X-1)^n Q + X^n P = 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple $(P_0, Q_0) \in \mathcal{S} \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]^2$.
2. Décrire $\mathcal{S}$.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \Phi\colon \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X]^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{2n-1}[X] \\ \quad (P, Q) \quad \longmapsto (X-1)^n Q + X^n P \end{cases}$

L'application Φ est bien définie puisque pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a

$$\deg(X-1)^n Q + X^n P \leqslant \max(\deg(X-1)^n Q, \deg X^n P) \leqslant 2n-1$$

et elle est linéaire par bilinéarité du produit. Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il vient

$$\Phi(P, Q) = 0 \iff (X-1)^n Q = -X^n P$$

On a $(X-1)^n \wedge X^n = 1$ et $X^n | (X-1)^n Q$ d'où $X^n | Q$ d'après le lemme de Gauss. Comme on a $\deg Q \leqslant n-1$, on en déduit $Q = 0$ puis $P = 0$ par intégrité ce qui prouve l'injectivité de Φ. Enfin, on observe

$$\dim \mathbb{R}_{n-1}[X]^2 = 2n = \dim \mathbb{R}_{2n-1}[X]$$

L'application Φ est linéaire injective entre deux espaces de même dimension et c'est par conséquent un isomorphisme. On en déduit que l'équation $\Phi(P, Q) = 1$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]^2$ et on conclut

$$\boxed{\text{Il existe un unique couple } (P_0, Q_0) \in \mathcal{S} \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]^2.}$$

2. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$. On a

$$\begin{aligned} (P, Q) \in \mathcal{S} &\iff (X-1)^n Q + X^n P = 1 \\ &\iff \begin{cases} (X-1)^n Q + X^n P = 1 \\ (X-1)^n Q_0 + X^n P_0 = 1 \end{cases} \iff (X-1)^n (Q - Q_0) = -X^n (P - P_0) \end{aligned}$$

Toujours d'après le lemme de Gauss, comme $X^n | (X-1)^n (Q - Q_0)$, il vient $X^n | (Q - Q_0)$ d'où $Q = Q_0 + X^n R$ avec $R \in \mathbb{R}[X]$ et

$$-X^n (P - P_0) = (X-1)^n X^n R$$

d'où $P = P_0 - (X-1)^n R$. Ainsi, on a

$$\mathcal{S} \subset \{(P_0 - (X-1)^n R, Q_0 + X^n R), R \in \mathbb{R}[X]\}$$

et on vérifie l'inclusion réciproque sans difficulté. On conclut

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(P_0 - (X-1)^n R, Q_0 + X^n R), R \in \mathbb{R}[X]\}}$$