Exercice 1. [Centrale MP 2024]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On désigne par μ_A son polynôme minimal.

1. Montrer que tout idéal de $\mathbb{C}[X]$ est de la forme $P\mathbb{C}[X]$, où $P \in \mathbb{C}[X]$.
2. Pour $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul, on note $\mu_{A,x}$ le générateur unitaire de l'idéal annulateur ponctuel $\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(A)x = 0\}$. Montrer qu'il existe $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\mu_{A,x} = \mu_A$.
3. Soit A une matrice diagonale par blocs dont la diagonale vaut (A_1, A_2) où A_1 et A_2 sont des matrices de Frobenius (compagnon) et $\chi_{A_1} \wedge \chi_{A_2} = 1$. Montrer que A est semblable à une matrice de Frobenius.

Solution :
(corrigé peu détaillé *)*

1. *C'est du cours, l'idée étant : $P\mathbb{C}[X]$ est un idéal, et réciproquement si I est un idéal non nul, on montre que le reste de la division euclidienne de tout élément de I par un polynôme de I de plus petit degré (que l'on peut même choisir unitaire) est nul, donc $I \subset P\mathbb{C}[X]$ (et l'inclusion inverse est vraie).*
2. *On montre le résultat si μ_A est la puissance d'un polynôme irréductible : $\mu_A = P^\alpha$, et il existe x tel que $P^{\alpha-1}(A)x \neq 0$. Alors $\mu_{A,x}$ divise μ_A puis $\mu_{A,x} = \mu_A$ et $(x, Ax, \ldots, A^{n-1}x)$ est une base de $\mathbb{C}^n$.*

   Dans le cas général, on utilise le lemme des noyaux et on décompose ainsi l'espace en somme de sous-espaces cycliques (i.e. engendrés par $\left(A^k x\right)_{k\in\mathbb{N}}$), et on note $x_1, \ldots, x_r$ les vecteurs qui déterminent cette décomposition. On note $x_0 = x_1 + \cdots + x_r$.

   Alors $\mu_{A,x_0} \mid \mu_A$ (c'est vrai pour tout x). Par ailleurs, si $x \in E$, il est combinaison linéaire des $A^k x_i$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1, r]\!]$, donc comme $\mu_{A,x_i} \mid \mu_{A,x_0}$ (vrai par stabilité des sous-espaces cycliques), $\mu_{A,x_0}(A)x = 0$, donc $\mu_A \mid \mu_{A,x_0}$.

   Finalement, $\mu_A = \mu_{A,x_0}$.
3. *Avec les notations de la question précédente, E est somme de deux sous-espaces cycliques déterminés par deux vecteurs x_1 et x_2. On a $\mu_{x_1} = \chi_{A_1}$ et $\mu_{x_2} = \chi_{A_2}$ (propriété des matrices compagnon), puis $\mu_A = \mu_{x_1+x_2} = \mathrm{PPCM}(\chi_{A_1}, \chi_{A_2}) = \chi_{A_1}\chi_{A_2} = \chi_A$, donc A est semblable à une matrice compagnon (caractérisée par $\chi = \mu$).*

Exercice 2. [Mines MP/MPI 2021]
Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des nombres complexes deux à deux distincts, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des éléments de $\mathbb{N}^*$, $n = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable telle que $\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AM = MA\}$.

1. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2$.
2. Soit $C'(A) = \{X \in \mathcal{M}_n(C) \mid \forall\, M \in C(A),\ XM = MX\}$. Montrer que $C'(A) = \mathbb{C}[A]$.

Solution :
(corrigé peu détaillé *)*

1. *On diagonalise et on exploite la stabilité des sous-espaces propres pour des endomorphismes qui commutent.*
2. $\mathbb{C}[A] \subset C'(A)$. *On travaille par blocs, en regardant le cas $r = 1$ $C'(A)$ est le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il est de dimension 1. Donc $C'(A)$ est de dimension r, comme $\mathbb{C}[A]$ (preuve avec utilisation du polynôme minimal), donc $\mathbb{C}[A] = C'(A)$.*

Exercice 3. [Mines]
On considère la suite de fonctions (f_n) définies par récurrence par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_0(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\right)$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette suite de fonctions.

Solution :

- *Convergence simple.*
  On montre par récurrence immédiate que pour tout $x > 0$, $f_n(x) > 0$. On étudie alors, pour $x > 0$ fixé, la suite récurrente :

$$u_0 = x \qquad et \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = F(u_n) \qquad où \qquad F(t) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{x}{t}\right)$$

  On calcule $F'(t) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2t^2} \geqslant 0 \iff 1 \leqslant \frac{x}{t^2} \iff t \geqslant \sqrt{x}$ car $t > 0$.
  On étudie aussi le signe de $F(t) - t = \frac{1}{2}\left(t + \frac{x}{t}\right) - t = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{t} - t\right) \iff t \leqslant \sqrt{x}$. On obtient le tableau complet :

t	0		$\sqrt{x}$		$+\infty$
$F'(t)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\frac{1}{2}$
F		$\searrow$	$\sqrt{x}$	$\nearrow$	
$F(t)-t$		$+$	0	$-$	

  Ce qui permet de voir que $[\sqrt{x}, +\infty[$ est F-stable, que $u_n \in [\sqrt{x}, +\infty[$ à partir du rang 1, que (u_n) est donc décroissante à partir du rang 1 et minorée, donc $u_n \to \sqrt{x}$ qui est le seul point fixe de $[\sqrt{x}, +\infty[$.
  Ainsi, $f_n(x) \to \sqrt{x}$ simplement.
- *Étude de la convergence uniforme.*

D'après les calculs déjà faits, $|F'(t)| \leqslant 1/2$ *sur* $[\sqrt{x}, +\infty[$ *et* $f_n(x) \geqslant \sqrt{x}$ *à partir du rang* 1*, donc l'inégalité des accroissements finis appliquée à* F *entre* $f_n(x)$ *et* $\sqrt{x}$ *donne :*

$$\left|f_{n+1}(x) - \sqrt{x}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|f_n(x) - \sqrt{x}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\left|f_1(x) - \sqrt{x}\right|$$

Or, $f_1(x) - \sqrt{x} = \frac{x+1}{2} - \sqrt{x}$ *est continue sur* $]0, a]$ *(*$a \in \mathbb{R}_+^*$ *fixé) donc est bornée sur cet intervalle. On a donc :*

$$\left|f_n(x) - \sqrt{x}\right| \leqslant K/2^{n-1} \to 0 \text{ indépendamment de } x$$

donc la suite converge uniformément sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4. [Mines MP/MPI 2021]

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est nilpotente si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}(M^k) = 0$
2. Soient G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $M \in G$, $M^N = I_n$ et $(M_1, \dots, M_p) \in G^p$ une base de $\mathrm{Vect}(G)$.
Montrer que l'application $A \in G \mapsto \left(\mathrm{tr}(AM_1), \dots, \mathrm{tr}(AM_p)\right)$ est injective.
Qu'en déduit-on sur G ?

Solution :
(corrigé peu détaillé *)*

1. *classique (via système de Vandermonde en supposant par l'absurde que* 0 *n'est pas la seule vp).*
2. *Soient* $A, B \in G$ *telles que* $\phi(A) = \phi(B)$*, alors par linéarité de la trace et du produit matriciel, pour tout* M *dans* $\mathrm{Vect}(G)$, $\mathrm{tr}((A-B)M) = 0$ *puis en posant* $M' = B^{-1}M \in G$, *pour tout* $M' \in \mathrm{Vect}(G)$, $\mathrm{tr}((AB^{-1} - I_n)M') = 0$.
En particulier, pour M' *une puissance de* $AB^{-1} - I_n$*, si bien que* $AB^{-1} - I_n$ *est nilpotente d'après la question précédente. Mais* $AB^{-1} \in G$ *est diagonalisable (annulée par* X^N*) tout comme* $AB^{-1} - I_n$*, donc* $AB^{-1} - I_n = 0$ *donc* $A = B$.
Il reste à démontrer que l'image de ϕ *est finie : c'est un* p*-uplet d'éléments de* $\mathbb{C}$ *qui sont des traces d'éléments de* G*, et ces traces sont des sommes de racines* N*-ième de l'unité, elles sont en nombre fini.*
Ccl : G *est fini.*

Exercice 5. [Mines]
Nature et calcul de

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right) \mathrm{d}x$$

On donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Solution :
L'intégrande ($e^2 e^{-x^2} e^{-1/x^2}$*) tend vers* 0 *en* 0 *et est un* $O(e^{-x^2})$ *en* $+\infty$ *donc converge.*
On s'intéresse à $I_X = \displaystyle\int_{\frac{1}{X}}^{X} \exp\left(-\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right) \mathrm{d}x$. *Alors* $I_X \xrightarrow[X \to +\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-(x - 1/x)^2)\,\mathrm{d}x$.
On effectue le changement de variable : $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$, $x = X \Leftrightarrow t = \frac{1}{X}$ *et* $x = \frac{1}{X} \Leftrightarrow t = X$ *:*

$$\begin{aligned} I_X &= \int_{\frac{1}{X}}^{X} \exp\left(-\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right) dx \\ &= \int_{\frac{1}{X}}^{X} \frac{1}{t^2} \exp\left(-\left(t - \frac{1}{t}\right)^2\right) dt \end{aligned}$$

Ainsi :

$$2I_X = \int_{\frac{1}{X}}^{X} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \exp\left(-\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right) dx$$

On effectue encore un changement de variable : $u = x - \frac{1}{x}$, $du = \underbrace{\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)}_{>0} \mathrm{d}x$, $x = \frac{1}{X} \Leftrightarrow u =$

$\frac{1}{X} - X$ *et* $x = X \Leftrightarrow u = X - \frac{1}{X}$:

$$2I_X = \int_{\frac{1}{X}-X}^{X-\frac{1}{X}} e^{-u^2}\, du \to \sqrt{\pi}$$

Exercice 6. [IMT MP/MPI 2023]
Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t$ et en donner la valeur.

Solution :
(pistes de correction *) cvd (domination par majoration de la somme d'une série spéciale alternée) et calcul* $-\frac{\pi}{2}\ln(2)$.

Exercice 7. [IMT MP/MPI 2023] Soient $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On veut montrer qu'il n'existe pas de matrice B telle que $B^2=A$. On suppose l'existence d'une telle matrice. Trouver un polynôme annulateur simple de B. Conclure.
3. Montrer que A est semblable à C.

Solution :
(pistes de correction *)*

1. *Non, sinon égale à* O_3.
2. $A^3=0$ *donc* X^6 *convient, donc* B *nilpotente d'ordre* 3, *donc* $B^3=0$, *donc* $\mathrm{Im}(B)\subset\mathrm{Ker}(B^2)=\mathrm{Ker}(A)$ *qui est de dimension* 1, *donc* B *de rang* 1, *donc* A *de rang au plus* 1, *c'est absurde.*
3. *on change de base pour* C *car même indice de nilpotence.*