Semaine 3 – Oraux blancs

Mines ponts : Probas et intégrale à paramètre

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

On se donne une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$. On pose enfin : $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$.

1. Donner la loi de $\dfrac{1}{2}(S_n + n)$. En déduire $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
2. On pose $A_n = |S_n|$.

a. Donner $A_n(\Omega)$.
b. Montrer que $E(A_{n+1}) = E(A_n) + P(S_n = 0)$.
c. En déduire : $E(A_{2n-1}) = E(A_{2n}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k$.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Exprimer F à l'aide de fonctions usuelles.

Mines ponts : endomorphisme de fonctions

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$

On fixe $\omega \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose :

$$T_\omega(f)(x) = \frac{1}{\int_0^x \omega(t)\mathrm{d}t} \int_0^x f(t)\omega(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $T_\omega(f)$ est prolongeable par continuité en 0.
2. Soit $a > 0$. Montrer que T_ω est un endomorphisme continu et injectif de $\mathcal{C}^0([0, a], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.
3. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, non nulle, telle que : $T_\omega(f) = \lambda f$.

a. Donner une équation différentielle vérifiée par f et la résoudre.
b. Montrer que $\lambda \in]0, 1]$.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, notée u_n.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.

Centrale 1 : série

1. Enoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.
2. Donner la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t} \mathrm{d}t$.
3. Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

Centrale 1 : Séries entières

1. Donner la définition de la densité d'une partie dans $\mathbb{R}$, et sa caractérisation par les suites.
2. Trouver l'ensemble des fonctions réelles continues en 0 telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

3. On dit que (a_n) vérifie (P) si :

$$(i) \text{ la série entière } \sum a_n x^n \text{a un rayon de convergence } R \geq 1$$

$$(ii) \sum a_n x^n \text{admet une limite finie en } 1$$

   Montrer que si $\sum a_n$ converge absolument, (a_n) vérifie (P). Réciproque ?
4. Trouver l'ensemble des suites $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ périodiques vérifiant (P).