

Mines - BEOS 8453

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum a_n$ converge et calculer sa somme.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

Montrer que f est définie et continue sur $] -1, 1]$, puis déterminer un équivalent de f en $(-1)^+$.

Centrale - BEOS 6874

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, à valeurs propres λ_k strictement positives. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

(a) Montrer que $\sum_{i=1}^n \varphi(a_{i,i}) \leq \sum_{i=1}^n \varphi(\lambda_i)$.

(b) Montrer que $\det(A) \leq \prod_{i=1}^n a_{i,i}$.

2. Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2}$$

On supposera par la suite que ce résultat est aussi valable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. On note D la boule fermée de rayon 1 de $\mathbb{C}$. Déterminer $\sup_{(z_1, \dots, z_n) \in D^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|$.

Navale - BEOS 8316

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi/2], F_n(x) = \sin(x) \cos^n(x).$$

1. Etudier la convergence de la suite (F_n) .

2. Etudier la convergence de (G_n) où $G_n = nF_n$.

3. On note $I_n = \int_0^{\pi/2} G_n(x) dx$.

Calculer I_n et déterminer sa limite.

CCINP - BEOS 7847**Exercice 1**

Exercice n°60 de la banque CCINP

Exercice 2

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{(x \ln x)^n}{n!}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa somme.

2. Montrer que $\int_0^1 f_n(t) dt$ converge et calculer cette intégrale.

3. Montrer que $\int_0^1 t^t dt$ converge et exprimer cette intégrale sous la forme d'une série.