ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Préparation à l'oral - Feuille n°7

Exercice 1 (CCINP 2024)

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de f différentiable en $(0,0)$.

2. On pose $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (CCINP 2024)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer $\qquad \mathrm{E} = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$

2. (a) Montrer $\qquad \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2 \iff \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$

   (b) Montrer $\qquad \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{E} = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$

Exercice 3 (CCINP 2024)

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit $(\mathrm{Y}_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi ayant un moment d'ordre 2. On pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k$ pour n entier. Montrer
$$\forall a > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{Y}_1)}{na^2}$$
3. Application : on effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprises entre 0.35 et 0.45 ?

Exercice 4 (Mines-Telecom 2024)

Soit $n > 2$ entier et $\mathrm{A} = \big(\sin(i+j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A})$ et $\det(\mathrm{A})$. On pourra considérer les colonnes $\mathrm{U} = \big(\cos(i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $\mathrm{V} = \big(\sin(i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Exercice 5 (Mines 2024)

Déterminer $\mathrm{T}_{\mathrm{I}_n}\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{T}_{\mathrm{I}_n}\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6 (Mines 2024)

Soit x solution sur $]\,0\,;+\infty\,[$ de l'équation différentielle

$$tx'' + x' + tx = 0$$

1. On pose $u(t) = \sqrt{t}x(t)$ pour $t > 0$. Déterminer une équation différentielle dont u est solution.
2. Montrer $$\int_a^b \frac{u(t)v(t)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = (uv' - u'v)(b) - (uv' - u'v)(a)$$ avec v solution de $v'' + v = 0$.
3. Montrer que pour tout $a > 0$, il existe $t_a \in \,]\,a\,;a+\pi\,[$ tel que $x(t_a) = 0$.
4. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{4^n (n!)^2}$ s'annule une infinité de fois.

Exercice 7 (Centrale 2024)

Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R}) \mid f^2 \in \mathrm{L}^1([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})\}$.

1. (a) Définir la notion de fonction intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
   (b) Soit $(f,g) \in \mathrm{E}^2$. Montrer que le produit fg est intégrable et en déduire que l'ensemble E est un $\mathbb{R}$-ev.

   On pose $$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} fg$$
2. (a) Montrer que $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle$ est un produit scalaire sur E.
   Soit $f \in \mathrm{E}$ avec f de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f'' \in \mathrm{E}$.
   (b) Montrer que $f' \in \mathrm{E}$.
   (c) Exprimer $\langle f',f'\rangle + \langle f,f''\rangle$, $\langle f,f'\rangle$, $\langle f',f''\rangle$ en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$.
3. On pose $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \langle f,f\rangle & \langle f',f\rangle & \langle f'',f\rangle \\ \langle f,f'\rangle & \langle f',f'\rangle & \langle f'',f'\rangle \\ \langle f,f''\rangle & \langle f',f''\rangle & \langle f'',f''\rangle \end{pmatrix}$$
   Montrer que $\det(\mathrm{A}) \geqslant 0$ puis étudier le cas d'égalité.

Exercice 8 (Centrale 2024)

1. En utilisant une comparaison série/intégrale dont on rappellera le principe, déterminer un équivalent simple de $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \to +\infty$.
2. Un entier n non nul est dit sans facteur carré s'il n'existe pas de $k \geqslant 2$ tel que k^2 divise n. Montrer que pour tout entier i non nul, il existe un unique couple (m,a) avec a et m entiers non nuls et m sans facteurs carrés tels que $i = ma^2$.
3. Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![\,1\,;n\,]\!]$. On pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} & \mathrm{X} \end{pmatrix}$. Soit p_n la probabilité que M ne soit pas inversible. Montrer $$p_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$