ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Préparation à l'oral - Feuille n°4

Exercice 1 (CCINP 2024)

Soit E un $\mathbb{R}$-evn et A une partie non vide de E.

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de l'adhérence $\bar{\mathrm{A}}$.
   (b) Prouver que A est convexe, alors $\bar{\mathrm{A}}$ convexe.
2. On pose
$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{d}_{\mathrm{A}}(x) = \operatorname*{Inf}_{a \in \mathrm{A}} \|x - a\|$$
   (a) Soit $x \in \mathrm{E}$. Montrer $\quad \mathrm{d}_{\mathrm{A}}(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x \in \bar{\mathrm{A}}$
   (b) On suppose que A est fermée et que la fonction d_{A} est convexe. Montrer que A est convexe.

Corrigé : Exercice 45 CCPINP 2024

Exercice 2 (CCINP 2024)

On considère la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Établir
$$\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
   où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum\limits_{n \geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. La série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Corrigé : Exercice 46 CCPINP 2024

Exercice 3 (CCINP 2024)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.
2. On note $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé à A.
   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. On précisera les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Corrigé : Exercice 75 CCPINP 2024

Exercice 4 (Mines 2024)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{E}_n)_n$ une suite d'événements. On pose $\mathrm{Z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathrm{E}_n}$.

1. Justifier que Z est une variable aléatoire discrète.
2. On suppose $\sum \mathbb{P}(\mathrm{E}_n)$ convergente. Montrer que Z est d'espérance finie puis calculer $\mathbb{E}(\mathrm{Z})$.

Corrigé : 1. On a $\mathrm{Z}(\Omega) \subset \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ d'où $\mathrm{Z}(\Omega)$ au plus dénombrable. On note $\mathrm{Z}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{\mathrm{E}_k}$ pour n entier. La suite $(\mathrm{Z}_n)_n$ est croissante et par conséquent, pour x entier

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{\mathrm{Z}_n \geqslant x\} = \{\exists n \in \mathrm{N} \mid \mathrm{Z}_n \geqslant x\} \subset \left\{\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Z}_n \geqslant x\right\} = \{\mathrm{Z} \geqslant x\}$$

Puis, comme la suite $(\mathrm{Z}_n)_n$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, pour x entier, on a

$$\begin{aligned}\{\mathrm{Z} \geqslant x\} &= \left\{\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Z}_n \geqslant x\right\} \\ &= \left\{\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \mathrm{Z}_n \geqslant x - \frac{1}{2}\right\} \subset \{\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \mathrm{Z}_n \geqslant x\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\mathrm{Z}_n \geqslant x\}\end{aligned}$$

Ainsi $$\forall x \in \mathbb{N} \qquad \{\mathrm{Z} \geqslant x\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\mathrm{Z}_n \geqslant x\} \in \mathscr{A}$$

puis $$\forall x \in \mathbb{N} \qquad \{\mathrm{Z} = x\} = \{\mathrm{Z} \geqslant x\} \setminus \{\mathrm{Z} \geqslant x+1\} \in \mathscr{A}$$

et $$\{\mathrm{Z} = +\infty\} = \bigcap_{x\in\mathbb{N}} \{\mathrm{Z} \geqslant x\} \in \mathscr{A}$$

On conclut $$\boxed{\text{L'application Z est une variable aléatoire discrète.}}$$

2. On note $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{E}_n)$. Pour n entier, on a

$$\mathbb{E}(\mathrm{Z}_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{E}_k) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\mathrm{Z}_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n \geqslant k)$$

Ainsi $$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n \geqslant k) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n \geqslant k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{E}_k) \leqslant \mathrm{S}$$

Soit k entier. La suite $(\{\mathrm{Z}_n \geqslant k\})_n$ est croissante et par continuité croissante

$$\mathbb{P}(\mathrm{Z}_n \geqslant k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\mathrm{Z}_n \geqslant k\}\right) = \mathbb{P}(\mathrm{Z} \geqslant k) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n \geqslant k) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{Z} \geqslant k)$$

d'où $$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n \geqslant k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}(\mathrm{Z} \geqslant k)$$

Ainsi $$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}(\mathrm{Z} \geqslant k) \leqslant \mathrm{S}$$

ce qui prouve que la série $\sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(\mathrm{Z} \geqslant k)$ converge d'où $\mathrm{Z} \in \mathrm{L}^1$. On pose

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad u_k(n) = \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n \geqslant k) \quad \text{et} \quad v_k = \mathbb{P}(\mathrm{Z} \geqslant k)$$

$$\text{On a} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad u_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} v_k \quad \text{et} \quad \forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad 0 \leqslant u_k(n) \leqslant v_k$$

avec $\sum v_k$ convergente. On en déduit la convergence normale et donc uniforme de $\sum u_k$ et par double limite

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$$

c'est-à-dire
$$\mathbb{E}(\mathrm{Z}_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{E}_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Z} \geqslant k) = \mathbb{E}(\mathrm{Z})$$

Ainsi
$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{Z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{E}_n)}$$

Exercice 5 (Mines 2024)

Soit n entier non nul. Déterminer et dénombrer les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Corrigé : On note $\mathscr{H}_n$ l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit H sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On note $x = \min\left\{k \in [\![1\,;\,n]\!] \mid \bar{k} \in \mathrm{H}\right\}$. Ce minimum est bien défini puisqu'il porte sur un ensemble qui est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ car $\bar{n} = \bar{0} \in \mathrm{H}$. On a clairement $\langle \bar{x} \rangle \subset \mathrm{H}$. Soit $y \in \mathbb{Z}$ tel que $\bar{y} \in \mathrm{H}$. D'après le théorème de la division euclidienne, on dispose de $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [\![0\,;\,x-1]\!]$ tel que $y = qx + r$ d'où

$$\bar{r} = \bar{y} - q\bar{x} \in \mathrm{H}$$

ce qui implique $r = 0$ par minimalité de x et prouve ainsi $\mathrm{H} = \langle \bar{x} \rangle$. On a donc établi

$$\mathscr{H}_n = \{\langle \bar{x} \rangle\,,\ x \in [\![1\,;\,n]\!]\}$$

Soit $x \in [\![1\,;\,n]\!]$. L'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe d'où, notant $c = o(\bar{x})$, on a $c|n$ donc $n = dc$ avec d entier nul. On a $c\bar{x} = \bar{0}$ d'où $cx = kn = kdc$ avec $k \in \mathbb{Z}$ d'où $x = kd$ et par conséquent $\bar{x} \in \langle \bar{d} \rangle$ ce qui prouve $\langle \bar{x} \rangle \subset \langle \bar{d} \rangle$. On suppose $d > 1$. On a $kd \in [\![1\,;\,n-1]\!]$ pour tout $k \in [\![1\,;\,c-1]\!]$ puisque $kd < cd = n$. On en déduit $o(\bar{d}) = c = n/d$ et le résultat vaut aussi pour $d = 1$. Par inclusion et égalité des cardinaux, on a donc $\langle \bar{x} \rangle = \langle \bar{d} \rangle$. Et plus généralement, pour tout $d \in \mathcal{D}_n$, on a $\langle \bar{d} \rangle$ sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'ordre n/d, unique d'après ce qui précède.

On conclut
$$\boxed{\mathscr{H}_n = \left\{\langle \bar{d} \rangle\,,\ d \in \mathcal{D}_n\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Card}\ \mathscr{H}_n = \mathrm{Card}\ \mathcal{D}_n}$$

Remarques : (1) Avec le théorème de Lagrange (officiellement hors-programme), l'ordre c d'un sous-groupe H de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ divise n d'où $n = dc$ et on montre que $\langle \bar{d} \rangle$ est l'unique sous-groupe d'ordre c.

(2) On pose
$$\forall x \in \mathbb{Z} \qquad \varphi(\langle \bar{x} \rangle) = \min\left\{k \in [\![1\,;\,n]\!] \mid \bar{k} \in \langle \bar{x} \rangle\right\}$$

Cette application est bien définie et on a montré

$$\forall x \in \mathbb{Z} \qquad \langle \bar{x} \rangle = \langle \varphi(\langle \bar{x} \rangle) \rangle$$

Soit $d \in \mathcal{D}_n$. Comme $\overline{\varphi(\langle \bar{d} \rangle)} \in \langle \bar{d} \rangle$, on dispose de $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\varphi(\langle \bar{d} \rangle) = kd + \ell n = d(k + \ell c)$ d'où $d|\varphi(\langle \bar{d} \rangle)$ et par définition de φ, on a $\varphi(\langle \bar{d} \rangle) \leqslant d$. On en déduit

$$\forall d \in \mathcal{D}_n \qquad \varphi(\langle \bar{d} \rangle) = d$$

Il s'ensuit que l'application $d \mapsto \langle \bar{d} \rangle$ est injective et on retrouve l'égalité $\mathrm{Card}\ \mathscr{H}_n = \mathrm{Card}\ \mathcal{D}_n$.

Exercice 6 (Navale 2024)

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n}$ converge.

Corrigé : On pose $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ pour n entier. Soit n entier, il vient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} = \sum_{k=1}^{n} [\mathrm{S}_k - \mathrm{S}_{k-1}] \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{S}_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{S}_k}{k+1} = \frac{\mathrm{S}_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{S}_k \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right]$$

La suite $(\mathrm{S}_n)_n$ est convergente donc bornée. Ainsi, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{S}_k}{k(k+1)} = \mathrm{o}(1) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n} \text{ converge.}}$$

Remarque : On a procédé à la *transformation d'Abel.*

Exercice 7 (Centrale 2024)

On note $\qquad \forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad \omega(t) = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$

et $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. On pose $\quad \forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$

et $\qquad \forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}'' + (2\mathrm{X}+1)\mathrm{P}'$

1. Montrer que $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que $\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$.
3. (a) Déterminer $\mathrm{Sp}\,(\varphi)$.
   (b) Montrer que l'endomorphisme φ admet une base de vecteurs propres échelonnés en degré.

Corrigé : 1. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On a $t \mapsto \mathrm{P}(t)\omega(t) \in \mathscr{C}_{pm}(\left]-1\,;1\right[,\mathbb{R})$, prolongeable par continuité en 1 et

$$\mathrm{P}(t)\omega(t) \underset{t\to-1}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$$

d'où $t \mapsto \mathrm{P}(t)\omega(t) \in \mathrm{L}^1(\left]-1\,;1\right[,\mathbb{R})$ par comparaison et critère de Riemann. L'application $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle$ est symétrique, linéaire en la première variable par bilinéarité du produit et de l'intégrale car convergence. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$. On a

$$\langle \mathrm{P},\mathrm{P}\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)^2\omega(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

et si $\langle \mathrm{P},\mathrm{P}\rangle = 0$, l'intégrande $t \mapsto \mathrm{P}(t)^2\omega(t)$ étant continue positif sur $\left]-1\,;1\right[$, il vient par séparation $\mathrm{P}(t)^2\omega(t) = 0$ pour $t \in \left]-1\,;1\right[$ d'où $\mathrm{P}(t) = 0$ pour $t \in \left]-1\,;1\right[$. Le polynôme P admet donc une infinité de racines ce qui prouve que c'est le polynôme nul. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle \text{ est un produit scalaire sur E.}}$$

2. L'application φ est linéaire par bilinéarité du produit et de la dérivation. On a $\varphi(1) = 0$, $\varphi(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X} + 1$ puis

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![2\,;\, n]\!] \qquad \varphi(\mathrm{X}^k) &= (\mathrm{X}^2 - 1)k(k-1)\mathrm{X}^{k-2} + (2\mathrm{X}+1)k\mathrm{X}^{k-1} \\ &= k(k+1)\mathrm{X}^k + k\mathrm{X}^{k-1} - k(k-1)\mathrm{X}^{k-2} \end{aligned}$$

Par caractérisation d'une application linéaire sur une base, on en déduit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. L'application $t \mapsto (t^2-1)\omega(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;1\,[$ et on trouve par dérivation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(t^2-1)\omega(t)\right] = 2t\omega(t) + (t^2-1)\omega'(t) = 2t\omega(t) + \frac{1-t}{1+t}\frac{1}{\omega(t)} = (2t+1)\omega(t)$$

Soit $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$. On vérifie sans difficulté la finitude et nullité du crochet $\left[(t^2-1)\omega(t)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}(t)\right]_{-1}^{1}$. En intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\mathrm{P}), \mathrm{Q} \rangle &= \int_{-1}^{1} \left[(t^2-1)\omega(t)\mathrm{P}''(t) + (2t+1)\omega(t)\mathrm{P}'(t)\right] \mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[(t^2-1)\omega(t)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}(t)\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} (1-t^2)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}'(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\qquad \forall (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle \varphi(\mathrm{P}), \mathrm{Q} \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}'(t)\,\mathrm{d}t$

expression symétrique en P et Q. On conclut

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{S}(\mathrm{E})}$$

3.(a) Le calcul de $\varphi(\mathrm{X}^k)$ pour $k \in [\![0\,;\, n]\!]$ montre que la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\varphi$ avec $\mathscr{C}$ base canonique de E est triangulaire supérieure et le spectre se lit donc sur la diagonale d'où

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(\varphi) = \{k(k+1), k \in [\![0\,;\, n]\!]\}}$$

3.(b) On pose $\qquad \forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \lambda_k = k(k+1)$

Soit $(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n)$ une base de diagonalisation de φ associée aux valeurs propres $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$. Pour $k \in [\![0\,;\, n]\!]$, on note

$$\mathrm{P}_k = \alpha_k \mathrm{X}^{d_k} + \mathrm{Q}_k \quad \text{avec} \quad \alpha_k \neq 0 \quad \text{et} \quad \deg \mathrm{Q}_k < d_k$$

Soit $k \in [\![0\,;\, n]\!]$. D'après le calcul fait à la question 2, on trouve

$$\varphi(\mathrm{P}_k) = \alpha_k \varphi(\mathrm{X}^{d_k}) + \varphi(\mathrm{Q}_k) = \alpha_k \lambda_{d_k} \mathrm{X}^{d_k} + \underbrace{\ldots + \varphi(\mathrm{Q}_k)}_{\deg < d_k} \quad \text{et} \quad \lambda_k \mathrm{P}_k = \alpha_k \lambda_k \mathrm{X}^{d_k} + \lambda_k \mathrm{Q}_k$$

Pour $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, on a $\lambda_k \neq 0$ d'où $\lambda_{d_k} \neq 0$ pour raison de degré et par identification des termes de plus haut degré $\lambda_k = \lambda_{d_k}$. Par injectivité de $k \mapsto \lambda_k$ qui est strictement croissante, il vient $d_k = k$ pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. Par ailleurs, si $d_0 \neq 0$, alors on a $\lambda_{d_0} \neq 0$ d'où $\varphi(\mathrm{P}_0) \neq 0$ ce qui est faux. On a donc

$$\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad d_k = k$$

On conclut

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \varphi \text{ admet une base de vecteurs propres échelonnés en degré.}}$$

Exercice 8 (Centrale 2024)

1. Rappeler l'équivalent de Stirling.
2. Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n}\,\mathrm{d}t$ pour $n \to +\infty$.
3. On pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}}$$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de F.
   (b) Développer F en série entière sur un voisinage de zéro.
   (c) Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{F}(x)$ pour $x \to 1$.

Corrigé : 1. On a $$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

2. Soit n entier. En intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t \\
&= [\sin(t)\cos(t)^{2n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(t)^2)\cos(t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t \\
\mathrm{I}_{n+1} &= (2n+1)\mathrm{I}_n - (2n+1)\mathrm{I}_{n+1}
\end{aligned}$$

d'où $$\mathrm{I}_{n+1} = \frac{2n+1}{2(n+1)}\mathrm{I}_n$$

On en déduit $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{I}_k}{\mathrm{I}_{k-1}} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)(2k)}{(2k)^2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

d'où $$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}\frac{1}{2^{2n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} 2\pi n}\frac{\pi}{2}$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}}$$

3.(a) Si $|x| > 1$, alors $$\forall t \in \left]\frac{1}{|x|}\,;1\right[\qquad (1-t^2)(1-x^2t^2) < 0$$

Si $|x| = 1$, on a par critère de Riemann
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)^2}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1-t)} \text{ divergente}$$

On pose $$\forall (x,t) \in \left]-1\,;1\right[\times \left[0\,;1\right[\qquad f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}}$$

Pour $|x| < 1$ et $t \in [0\,;1[$, on a $\qquad (1-t^2)(1-x^2t^2) > 0$

et on en déduit $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}([0\,;1[\,,\mathbb{R})$ pour tout $|x| < 1$ et on trouve
$$f(x,t) \underset{t\to1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2(1-x^2)}}\frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

ce qui prouve $f(x,\cdot) \in \mathrm{L}^1([\,0\,;1\,[\,,\mathbb{R})$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction F est définie sur }]\,-1\,;1\,[.}$$

3.(b) On trouve
$$\forall u \in \,]\,-1\,;1\,[\qquad \frac{1}{\sqrt{1-u}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} u^n$$

d'où
$$\forall x \in \,]\,-1\,;1\,[\qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} (xt)^{2n}\,\mathrm{d}t$$

On fixe $x \in \,]\,-1\,;1\,[$. On pose

$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} (xt)^{2n}$$

On vérifie sans difficulté $u_n \in \mathrm{L}^1([\,0\,;1\,[\,,\mathbb{R})$ pour n entier par comparaison et critère de Riemann. La série $\sum u_n$ converge simplement et la fonction somme est $t \mapsto f(x,t)$, continue par morceaux sur $[\,0\,;1\,[$. Avec le changement de variables $t = \cos(u)$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{I}_n$$

Ainsi
$$\sum \int_0^1 |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = \sum \frac{2}{\pi} \mathrm{I}_n^2 x^{2n} \quad \text{avec} \quad \mathrm{I}_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4n}$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ est égal à 1 et on en déduit la convergence de $\sum \int_0^1 |u_n(t)|\,\mathrm{d}t$. Ainsi, par intégration terme à terme, il vient

$$\forall x \in \,]\,-1\,;1\,[\qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Et on conclut
$$\boxed{\forall x \in \,]\,-1\,;1\,[\qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \mathrm{I}_n^2 x^{2n}}$$

3.(c) On a
$$\frac{2}{\pi} \mathrm{I}_n^2 \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_n = \frac{2}{\pi} \mathrm{I}_n^2 - \frac{1}{2n}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de N entier non nul tel que

$$\forall n > \mathrm{N} \qquad |v_n| \leqslant \varepsilon \frac{1}{n}$$

d'où
$$\forall x \in [\,0\,;1\,[\qquad \begin{aligned} \left|\sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^{2n}\right| &\leqslant \left|\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} v_n x^{2n}\right| + \varepsilon \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &\leqslant \left|\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} v_n x^{2n}\right| - \varepsilon \ln(1-x) \end{aligned}$$

puis
$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n \underset{x\to 1}{=} \mathrm{o}(\ln(1-x))$$

Enfin, on a $\qquad \forall x \in [\,0\,;1\,[\qquad \mathrm{F}(x) = \dfrac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{2n}$

$$\underset{x\to 1}{=} \frac{2}{\pi} + \mathrm{o}(\ln(1-x)) - \frac{1}{2}\ln((1-x)(1+x))$$

On conclut $\qquad \boxed{\mathrm{F}(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\dfrac{1}{2}\ln(1-x)}$

Exercice 9 (ENS 2024)

Soit $\mathrm{A} = \mathscr{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{C}^)$. On pose

$$\forall (f,g) \in \mathrm{A}^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

1. Montrer que le triplet $(\mathrm{A}, +, \star)$ est un anneau commutatif intègre.
2. Déterminer $\mathrm{U}(\mathrm{A})$.
3. Soient a, b, c dans A avec a et $b^{\star 2} - 4a \star c$ inversibles. Résoudre l'équation

$$a \star x^{\star 2} + b \star x + c = 0$$

   d'inconnue $x \in \mathrm{A}$.

Corrigé : 1. Soient f, g, h dans A et n entier non nul. On note $\mathcal{C}_n = \{(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ ab = n\}$ et $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des diviseurs de n. L'application $\mathcal{D}_n \to \mathcal{C}_n, d \mapsto (d, n/d)$ réalise une bijection d'où

$$\sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ ab=n} f(a)g(b)$$

puis

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(n) &= \sum_{(d,c)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ dc=n} (f*g)(d)h(c) \\ &= \sum_{(d,c)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ dc=n} \left(\sum_{(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2, ab=d} f(a)g(b)h(c) \right) = \sum_{(a,b,c)\in(\mathbb{N}^*)^3, abc=n} f(a)g(b)h(c)\end{aligned}$$

Les lois $+$ et $*$ sont des lois de composition interne sur A et la loi $*$ est commutative et associative d'après les ce qui précède. On vérifie sans difficulté l'existence d'un neutre $\delta = \mathbb{1}_{\{1\}}$ pour la loi $\star$. Soient f et g dans A avec $f \neq 0$ et $g \neq 0$. On pose

$$n_0 = \operatorname{Min}\,\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq 0\} \quad \text{et} \quad n_1 = \operatorname{Min}\,\{n \in \mathbb{N} \mid g(n) \neq 0\}$$

Il vient

$$\begin{aligned}(f \star g)(n_0 n_1) &= \sum_{d|n_0n_1} f(d) g\left(\frac{n_0n_1}{d}\right) \\ &= \sum_{d|n_0n_1,\ d\geqslant n_0,\ n_0n_1/d \geqslant n_1} f(d) g\left(\frac{n_0n_1}{d}\right) = \sum_{d|n_0n_1, d=n_0} f(d) g\left(\frac{n_0n_1}{d}\right) = f(n_0)g(n_1) \neq 0\end{aligned}$$

On conclut $\qquad \boxed{\text{Le triplet } (\mathrm{A}, +, \star) \text{ est un anneau commutatif intègre.}}$

2. Soit $f \in \mathrm{U}(\mathrm{A})$. On dispose de $g \in \mathrm{A}$ tel que $f \star g = \delta$. En particulier, on a

$$(f \star g)(1) = f(1)g(1) = 1$$

d'où $f(1) \neq 0$ et $g(1) = f(1)^{-1}$. Puis, on définit g par récurrence avec

$$\forall n \geqslant 2 \qquad g(n) = -f(1)^{-1} \sum_{d|n,\ d>1} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

Ainsi, on a $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (f \star g)(n) = f(1)g(n) + \sum_{d|n,\ d>1} f(d) g\left(\dfrac{n}{d}\right) = \delta(n)$

On conclut $\qquad \boxed{\mathrm{U(A)} = \{f \in \mathrm{A} \mid f(1) \neq 0\}}$

3. Soit $x \in \mathrm{A}$. On a

$$\begin{aligned} a \star x^{\star 2} + b \star x + c &= a \star (x^{\star 2} + a^{-1} \star b \star x) + c = 0 \\ &= a \star \left(x + \frac{1}{2} a^{-1} \star b\right)^{\star 2} + c - \frac{1}{4} a^{-1} \star b^{\star 2} = 0 \end{aligned}$$

On pose $\Delta = b^{\star 2} - 4a \star c$. Il vient

$$a \star x^{\star 2} + b \star x + c = 0 \iff a \star \left(x + \frac{1}{2} a^{-1} \star b\right)^{\star 2} = \frac{1}{4} a^{-1} \star \Delta$$

On construit par récurrence une solution de l'équation $f^2 = \Delta$ d'inconnue $f \in \mathrm{A}$. On choisit $f(1)$ solution de $f(1)^2 = \Delta(1)$. On a $f(1) \neq 0$ puisque $\Delta(1) \neq 0$. Puis, pour $n \geqslant 2$ entier, on pose

$$f(n) = \frac{1}{2} f(1)^{-1} \left(\Delta(n) - \sum_{d|n,\ 1<d<n} f(d) f\left(\frac{n}{d}\right)\right)$$

Ainsi, pour n entier non nul, il vient

$$(f \star f)(n) = \sum_{d|n} f(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = 2f(1)f(n) + \sum_{d|n,\ 1<d<n} f(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \Delta(n)$$

Soit $d \in \mathrm{A}$ tel que $d^{\star 2} = \Delta$. On a

$$\begin{aligned} a \star x^{\star 2} + b \star x + c = 0 &\iff \left(x + \frac{1}{2} a^{-1} \star b\right)^{\star 2} - \left(\frac{1}{2} a^{-1} \star d\right)^{\star 2} = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{1}{2} a^{-1} \star (b - d)\right) \star \left(x + \frac{1}{2} a^{-1} \star (b + d)\right) = 0 \end{aligned}$$

Par intégrité, on conclut $\qquad \boxed{\text{Les solutions sont } -\dfrac{1}{2} a^{-1} \star (b \pm d).}$