

Préparation à l'oral - Feuille n°8

Exercice 1 (CCINP 2024)

Soit E l'espace des fonctions continues 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$$

1. Démontrer que $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. Soit $F = \text{Vect}(x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos(2x))$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $x \mapsto \sin^2 x$.

Corrigé : Exercice 80 CCINP 2024

Exercice 2 (CCINP 2024)

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions avec $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$.

1. Montrer $\sum f_n$ converge uniformément sur $A \implies f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{CU} 0$ sur A

2. On pose $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [0; +\infty[\quad f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$

Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$. La convergence est-elle uniforme ?

Corrigé : Exercice 17 CCINP 2024

Exercice 3 (Navale 2017)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer

$$\text{Ker } u = \text{Im } u \iff u^2 = 0 \quad \text{et} \quad \exists v \in \mathcal{L}(E) \quad | \quad u \circ v + v \circ u = \text{id}$$

Corrigé : Supposons que $u^2 = 0$ et qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v + v \circ u = \text{id}$. On a $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$. Puis, soit $x \in \text{Ker } u$, il vient

$$x = u \circ v(x) + v \circ u(x) = u(v(x)) \in \text{Im } u$$

ce qui prouve le sens indirect. Supposons que $\text{Im } u = \text{Ker } u$. On a clairement $u^2 = 0$. Soit H un supplémentaire de $\text{Ker } u$ (recours au lemme de Zorn, officiellement hors-programme). On sait que $\varphi : H \mapsto \text{Im } u, x \mapsto u(x)$ est un isomorphisme. On a donc

$$\forall x \in H \quad \varphi^{-1} \circ u(x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in \text{Im } u \quad u \circ \varphi^{-1}(y) = y$$

On définit alors l'application v sur E par

$$\forall x = a + b \in E \quad \text{avec} \quad (a, b) \in \text{Ker } u \times H \quad v(x) = \varphi^{-1}(a)$$

L'application v est bien définie puisque $E = \text{Ker } u \oplus H$. Pour $x = a + b \in E$ avec $(a, b) \in \text{Ker } u \times H$, en observant que $a \in \text{Im } u$ et $u(x) = u(b)$, il vient

$$u \circ v(x) + v \circ u(x) = u(\varphi^{-1}(a)) + \varphi^{-1}(u(b)) = a + b = x$$

On conclut

$$\boxed{\text{Ker } u = \text{Im } u \iff u^2 = 0 \quad \text{et} \quad \exists v \in \mathcal{L}(E) \quad | \quad u \circ v + v \circ u = \text{id}}$$

Remarque : Pour le sens direct, l'absence d'hypothèse sur la dimension rend les choses délicates. Supposons que E est de dimension finie. D'après le théorème du rang, notant $r = \text{rg } u = \dim \text{Ker } u$, on a $n = \dim E = 2r$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\text{Im } u$. Pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, il existe $e_{r+i} \in E$ tel que $e_i = u(e_{r+i})$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0$. Par suite, on a

$$u \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \underbrace{u^2(e_{r+i})}_{=0_E} + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i u(e_i) = \sum_{i=1}^r \alpha_{r+i} e_i = 0_E$$

d'où la nullité de $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$ puis celle de $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre de cardinal n ce qui en fait une base de E et on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

On définit alors $v : E \rightarrow E, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^r x_i e_{r+i}$. Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, on a

$$u \circ v(x) + v \circ u(x) = u \left(\sum_{i=1}^r x_i e_{r+i} \right) + v \left(\sum_{i=1}^r x_{r+i} e_i \right) = \sum_{i=1}^r x_i e_i + \sum_{i=r+1}^n x_i e_i = x$$

On peut aussi le voir matriciellement. On a choisi v pour avoir $\text{mat}_{\mathcal{B}} v = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline I_r & 0 \end{array} \right)$ et avec des produits par blocs, on a bien

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline I_r & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline I_r & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = I_n$$

Exercice 4 (Centrale 2023)

1. Montrer le théorème d'intégration des séries uniformément convergentes sur un segment.
2. Soit $\gamma \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{C})$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. On pose

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt$$

et on étend cette définition au cas où la fonction f est à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $r > 0$, on note

$$\forall t \in [0; 2\pi] \quad \gamma_r(t) = re^{it}$$

Soit $\sum b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini et f sa somme. Montrer

$$\forall a \in \mathbb{C} \quad \forall r > |a| \quad f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a} \, dz$$

3. En déduire que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour r assez grand, on a l'égalité

$$\exp(M) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} e^z (zI_n - M)^{-1} \, dz$$

Corrigé : 1. On applique le théorème d'intégration des suites uniformément convergentes sur un segment à la suite des sommes partielles (voir cours).

2. Soit n entier, $a \in \mathbb{C}$ et $r > |a|$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{z^n}{z-a} dz &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^n e^{int}}{r e^{it} - a} i r e^{it} dt \\ &= \frac{r^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{int}}{1 - \frac{a}{r} e^{-it}} dt = \frac{r^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a e^{-it}}{r} \right)^k dt \end{aligned}$$

On a
$$\sum \int_0^{2\pi} \left| e^{ikt} \left(\frac{a e^{-it}}{r} \right)^k \right| dt = \sum 2\pi \left(\frac{|a|}{r} \right)^k < +\infty$$

Ainsi, par intégration terme à terme, il vient

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{z^n}{z-a} dz = r^n \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^k \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t} dt}_{=\delta_{n,k}} = a^n$$

Puis, pour $a \in \mathbb{C}$ et $r > |a|$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r e^{it} - a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^n e^{int} \right) i r e^{it} dt$$

On pose

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times [0; 2\pi] \quad u_n(t) = \frac{1}{2\pi} b_n r^n e^{int} \frac{1}{1 - \frac{a}{r} e^{-it}}$$

Par inégalité triangulaire inverse, on trouve

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times [0; 2\pi] \quad |u_n(t)| \leq \frac{|b_n| r^n}{2\pi} \frac{1}{1 - \frac{|a|}{r}}$$

et on en déduit la convergence de la série $\sum \int_0^{2\pi} |u_n(t)| dt$. Par intégration terme à terme, il vient

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a} dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n a^n$$

On conclut

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{C} \quad \forall r > |a| \quad f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a} dz}$$

3. La fonction exponentielle est développable en série entière de rayon de convergence infini avec

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Pour $a \in \mathbb{C}$ et $r > |a|$, on a d'après le résultat de la question précédente

$$e^a = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} e^z (z-a)^{-1} dz$$

On en déduit que pour $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $r > \max_{\lambda \in \text{Sp}(D)} |\lambda|$, on a, par définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs vectorielles

$$\exp(D) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i} E_{i,i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} e^z (z - \lambda_i)^{-1} dz E_{i,i} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} e^z \underbrace{\sum_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{-1} E_{i,i}}_{=(zI_n - D)^{-1}} dz$$

d'où
$$\exp(D) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} e^z (zI_n - D)^{-1} dz$$

Étendons ce résultat par densité à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $r > \|A\|_{\text{op}}$. On pose

$$\forall (M, t) \in B(0, r) \times [0; 2\pi] \quad g(M, t) = \exp(re^{it}) (re^{it}I_n - M)^{-1} i r e^{it}$$

L'application est bien définie : pour $(M, t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times [0; 2\pi]$, on a

$$re^{it}I_n - M = re^{it} (I_n - \widetilde{M}) \quad \text{avec} \quad \widetilde{M} = r^{-1}e^{-it}M$$

et pour $M \in B(0, r)$
$$\|\widetilde{M}\|_{\text{op}} = r^{-1}\|M\|_{\text{op}} < 1$$

d'où l'inversibilité de $I_n - \widetilde{M}$ dont l'inverse est $\sum_{k=0}^{+\infty} \widetilde{M}^k$ (résultat établi dans le chapitre *Séries et Fonctions Vectorielles*). Vérifions les hypothèses de continuité sous l'intégrale.

- Pour $M \in B(0, r)$, on a $g(M, \cdot) \in \mathcal{C}_{pm}([0; 2\pi], \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$.
- Pour $t \in [0; 2\pi]$, la fonction $g(\cdot, t)$ est continue sur $B(0, r)$. En effet, La fonction inverse décrite par $M \mapsto \frac{1}{\det M} (\text{Com } M)^\top$ est continue sur $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ puisqu'elle est à coordonnées rationnelles bien définie et le reste suit.
- Soit $\delta = \frac{r - \|A\|_{\text{op}}}{2}$. La fonction g continue sur le compact $B_f(A, \delta) \times [0; 2\pi]$ (produit de deux compacts) y est bornée d'où une domination par une fonction constante intégrable.

Ainsi, la fonction
$$M \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} e^z (zI_n - M)^{-1} dz$$

est continue sur $B_f(A, \delta)$. Or, l'ensemble $\mathcal{D}_n^s(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables à valeurs propres simples est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (exercice classique, non trivial). Par conséquent, il existe une suite $(D_k)_k$ à valeurs dans $B_f(A, \delta) \cap \mathcal{D}_n^s(\mathbb{C})$ telle que $D_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A$. Par continuité de l'exponentielle matricielle, on conclut

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \forall r > \|A\|_{\text{op}} \quad \exp(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} e^z (zI_n - A)^{-1} dz}$$

Exercice 5 (Mines 2023)

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = \varphi(x)e^{-\|x\|^2}$

Montrer que la fonction f admet un maximum et un minimum sur $\mathbb{R}^n$ puis les déterminer.

Corrigé : Si la forme φ est nulle, la fonction f est constante nulle et c'est immédiat. On suppose φ non nulle. On dispose de $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\varphi = \langle \cdot, a \rangle$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad |\varphi(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \|x\| \|a\|$$

d'où
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad |f(x)| \leq \|a\| \|x\| e^{-\|x\|^2}$$

Ainsi
$$|f(x)| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} 0$$

On a $f(a) = \|a\|^2 e^{-\|a\|^2} > 0$ et $f(-a) = -f(a) < 0$

On choisit $R \geq \|a\|$ tel $f(-a) \leq f(x) \leq f(a)$ pour $\|x\| > R$. La fonction f continue admet des extremums sur le compact $B_f(0, R)$ avec un maximum plus grand que $f(a)$ et un minimum plus petit que $f(-a)$ puisque a et $-a$ sont dans $B_f(0, R)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Si $\|x\| \leq R$, on a

$$\min_{B_f(0, R)} f \leq f(x) \leq \max_{B_f(0, R)} f$$

et si $\|x\| > R$, on a

$$\min_{B_f(0, R)} \leq f(-a) \leq f(x) \leq f(a) \leq \max_{B_f(0, R)} f$$

Ainsi, les extremums atteints par f sur $B_f(0, R)$ sont les extremums sur $\mathbb{R}^n$. Puis, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$ comme composée de telles fonctions et les extremums cherchés sont donc parmi les points critiques. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right) e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Par dérivation, il vient pour $x \in \mathbb{R}^n$

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \partial_i f(x) = (a_i - 2x_i \langle x, a \rangle) e^{-\|x\|^2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\nabla f(x) = 0 \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket a_i = 2x_i \langle x, a \rangle$$

Un vecteur x solution de $\nabla f(x) = 0$ vérifie $\langle x, a \rangle \neq 0$. Sinon, on aurait $a = 0_{\mathbb{R}^n}$ ce qui est faux. Par conséquent, il vient

$$\nabla f(x) = 0 \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x_i = \frac{a_i}{2 \langle x, a \rangle}$$

Or, en injectant cette relation sur les x_i dans l'expression de $\langle x, a \rangle$, on obtient

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x_i = \frac{a_i}{2 \langle x, a \rangle} \iff \begin{cases} \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket & x_i = \frac{a_i}{2 \langle x, a \rangle} \\ \langle x, a \rangle = \frac{\|a\|^2}{2 \langle x, a \rangle} \end{cases} \iff \begin{cases} \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket & x_i = \frac{a_i}{2 \langle x, a \rangle} \\ \langle x, a \rangle = \pm \frac{\|a\|}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

On obtient $\nabla f(x) = 0 \iff x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}\|a\|}$

On trouve exactement deux points critiques donc l'un est le maximum et l'autre le minimum et on conclut

La fonction f admet un maximum et un minimum sur $\mathbb{R}^n$, respectivement en $\frac{a}{\sqrt{2}\|a\|}$ et en $-\frac{a}{\sqrt{2}\|a\|}$.

Variante : On peut complètement se passer du calcul différentiel pour résoudre cet exercice. On a établi

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad |f(x)| \leq \|a\| \psi(\|x\|) \quad \text{avec} \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad \psi(u) = u e^{-u^2}$$

Après étude, on observe que la fonction ψ atteint ses bornes en $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Alors, en prenant x colinéaire à a tel que $\|x\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ c'est-à-dire $x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}\|a\|}$, il vient d'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$f\left(\frac{a}{\sqrt{2}\|a\|}\right) = \|a\| \max \psi \quad \text{et} \quad f\left(-\frac{a}{\sqrt{2}\|a\|}\right) = -\|a\| \max \psi$$

ce qui prouve que la fonction f y atteint respectivement ses bornes et uniquement en ces points puisque l'inégalité de Cauchy-Schwarz est stricte pour une famille liée.

Exercice 6 (Mines 2023)

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ non constante vérifiant

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad f(AB) = f(A)f(B)$$

Montrer $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff f(A) \neq 0$

Corrigé : On observe $f(0) = f(0)^2$ et $f(I_n) = f(I_n)^2$ d'où $f(0)$ et $f(I_n)$ dans $\{0, 1\}$. Si $f(0) = 1$, on aurait

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad f(M) = f(0)f(M) = f(0)$$

ce qui contredit f non constante. On en déduit $f(0) = 0$ et donc $f(I_n) = 1$. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. On dispose de $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$. Il s'ensuit

$$f(A)f(B) = f(AB) = f(I_n) = 1$$

d'où $f(A) \neq 0$. Réciproquement, supposons $\text{rg } A = r < n$. Les matrices A et $K_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont même rang et sont donc équivalentes. Par conséquent, on dispose de P, Q dans $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PK_rQ$. La matrice K_r est triangulaire supérieure stricte donc nilpotente. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'ordre p . On a

$$0 = f(0) = f(N^p) = f(N)^p$$

d'où $f(N) = 0$. Ainsi, on obtient

$$f(A) = f(P)f(K_r)f(Q) = 0$$

On conclut

$$\boxed{A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff f(A) \neq 0}$$

Exercice 7 (Centrale 2023, X 2019)

Soit $(G, \star)$ un groupe fini d'ordre n . On note $\widehat{G}$ l'ensemble des morphismes de $(G, \star)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.

1. (a) Rappeler la définition de l'ordre d'un élément de G . Que peut-on dire de l'ordre de $g \in G$?
 (b) Pour $\varphi \in \widehat{G}$, préciser les valeurs possibles pour $\varphi(g)$ avec $g \in G$.
 (c) Montrer que l'ensemble $\widehat{G}$ est fini. On note $\widehat{n}$ son cardinal.
2. (a) Pour $\varphi \in \widehat{G} \setminus \{1\}$, montrer $\sum_{g \in G} \varphi(g) = 0$.
 (b) Montrer que $\widehat{G}$ est une partie libre de $\mathbb{C}^G$.
 (c) En déduire $\widehat{n} \leq n$.

(d) Si le groupe $(G, \star)$ est cyclique, établir $\widehat{n} = n$.

3. On suppose $(G, +)$ abélien fini.

(a) Pour $x \in G$, on note $\delta_x : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}, \chi \mapsto \chi(x)$. Vérifier que $\delta_x \in \widehat{\widehat{G}}$ pour $x \in G$ puis établir que l'application $\Phi : G \rightarrow \widehat{\widehat{G}}, x \mapsto \delta_x$ est un isomorphisme.

(b) En déduire $\widehat{n}$.

Corrigé : 1.(a) Soit $g \in G$. L'ordre de g noté $o(g)$ est le plus petit entier k non nul tel que $g^k = e$. On a $o(g) | n$.

1.(b) Soit $g \in G$. On a $\varphi(g^n) = \varphi(e) = 1$ et $\varphi(g^n) = \varphi(g)^n$

D'où

$$\boxed{\forall g \in G \quad \varphi(g) \in \mathbb{U}_n}$$

1.(c) On a $\widehat{G} \subset \mathbb{U}_n^G$ avec G et $\mathbb{U}_n$ des ensembles finis. Par conséquent

$$\boxed{\text{L'ensemble } \widehat{G} \text{ est fini.}}$$

Remarque : L'ensemble $\widehat{G}$ est appelé *dual* de G et les éléments de $\widehat{G}$ sont appelés *caractères* de G .

2.(a) Soit $\varphi \in \widehat{G} \setminus \{1\}$. On dispose de $a \in G$ tel que $\varphi(a) \neq 1$. L'application $G \rightarrow G, g \mapsto a \star g$ réalise une permutation de G et il vient

$$\sum_{g \in G} \varphi(g) = \sum_{g \in G} \varphi(a \star g) = \sum_{g \in G} \varphi(a) \varphi(g)$$

d'où

$$(1 - \varphi(a)) \sum_{g \in G} \varphi(g) = 0$$

On conclut

$$\boxed{\sum_{g \in G} \varphi(g) = 0}$$

2.(b) Observons en premier lieu que l'ensemble $\mathbb{C}^G$ possède bien une structure de $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ étant commutatif, on vérifie sans difficulté que $(\widehat{G}, \times)$ possède une structure de groupe (la loi $\times$ est bien une loi interne à $\widehat{G}$ et tout le reste suit). Soit $(\alpha_\varphi)_{\varphi \in \widehat{G}}$ famille de complexes telle que $\sum_{\varphi \in \widehat{G}} \alpha_\varphi \varphi = 0_{\mathbb{C}^G}$. Soit $\psi \in \widehat{G}$. Il vient

$$\sum_{\varphi \in \widehat{G}} \alpha_\varphi \varphi \psi^{-1} = 0_{\mathbb{C}^G}$$

d'où

$$\sum_{g \in G} \left(\sum_{\varphi \in \widehat{G}} \alpha_\varphi \varphi \psi^{-1}(g) \right) = 0$$

et en permutant l'ordre de sommation, il vient

$$\sum_{\varphi \in \widehat{G}} \alpha_\varphi \left(\sum_{g \in G} \varphi \psi^{-1}(g) \right) = \alpha_\psi = 0$$

On conclut

$$\boxed{\text{La famille } \widehat{G} \text{ est une partie libre de } \mathbb{C}^G.}$$

2.(c) Soit $\varphi \in \widehat{G}$. On a

$$\varphi = \sum_{g \in G} \varphi(g) \mathbf{1}_{\{g\}}$$

ce qui prouve que la famille $\{\mathbf{1}_{\{g\}}\}_{g \in G}$ est génératrice de $\mathbb{C}^G$. Il s'ensuit que $\dim \mathbb{C}^G \leq n$ et comme la famille $\widehat{G}$ est une partie libre de $\mathbb{C}^G$, on conclut

$$\widehat{n} \leq n$$

2.(d) Soit $g \in G$ tel que $G = \langle g \rangle = \{kg, k \in \mathbb{Z}\}$ et soit $\varphi \in \widehat{G}$. On a $\varphi(g) \in \mathbb{U}_n$ d'où $\varphi(g) = \omega^\ell$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $\ell \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Il en résulte que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \varphi(kg) = \varphi(g)^k = \omega^{k\ell}$$

On pose $\forall \ell \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad \chi_\ell: \begin{cases} G & \longrightarrow \mathbb{C} \\ kg, k \in \mathbb{Z} & \longmapsto \omega^{k\ell} \end{cases}$

Soit $\ell \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. L'application χ_ℓ est bien définie. En effet, soit $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $kg = k'g$. On a $(k - k')g = 0$ d'où $n|(k - k')$ ce qui prouve $k = k' + nq$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et il vient

$$\omega^{k\ell} = \omega^{(k'+nq)\ell} = \omega^{k'\ell} \omega^{nq\ell} = \omega^{k'\ell}$$

De plus, c'est un élément de $\widehat{G}$ puisque

$$\forall (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \quad \chi_\ell(kg + k'g) = \chi_\ell((k + k')g) = \omega^{\ell(k+k')} = \omega^{\ell k} \omega^{\ell k'} = \chi_\ell(k) \chi_\ell(k')$$

Ainsi, on a $\widehat{G} = \{\chi_\ell, \ell \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\}$

Pour $(\ell, j) \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket^2$, on a

$$\begin{aligned} \chi_j = \chi_\ell &\implies \chi_j(1) = \chi_\ell(1) \\ &\implies \omega^{j-\ell} = 1 \implies j - \ell \in n\mathbb{Z} \cap \llbracket -(n-1); n-1 \rrbracket \implies j = \ell \end{aligned}$$

On conclut

$$\widehat{n} = \text{Card} \{\chi_\ell, \ell \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\} = n$$

Remarque : On peut montrer $G \simeq \widehat{G}$ en vérifiant que l'application

$$\Psi: \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow \widehat{G} \\ \bar{j} & \longmapsto \chi_j \end{cases}$$

où $j \in \bar{j} \cap \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ est un isomorphisme de groupes. L'application est bien définie car χ_j ne dépend pas du choix d'un représentant de $\bar{j}$ puisque

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \chi_{j+k\ell} = \chi_j$$

Elle est clairement surjective et injective puisque pour $j \in \mathbb{Z}$, on a $\chi_j = \mathbf{1}$ implique $\omega^j = 1$ qui implique $\bar{j} = \bar{0}$. Enfin, on a

$$\forall (j, \ell) \in \mathbb{Z}^2 \quad \Psi(\bar{\ell} + \bar{j}) = \Psi(\overline{j + \ell}) = \chi_{j+\ell} = \chi_j \chi_\ell$$

Ainsi

$$\widehat{G} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq G$$

3.(a) La notation $\widehat{\widehat{G}}$ a du sens puisque c'est l'ensemble des morphismes du groupe $(\widehat{G}, \times)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$. L'ensemble $\widehat{\widehat{G}}$ est appelé *bidual* de G . Soit $x \in G$ et $(\varphi, \chi) \in \widehat{\widehat{G}}^2$. On a

$$\delta_x(\chi\varphi) = (\chi\varphi)(x) = \chi(x)\varphi(x) = \delta_x(\chi)\delta_x(\varphi)$$

D'où

$$\forall x \in G \quad \delta_x \in \widehat{\widehat{G}}$$

Soit $(x, y) \in G^2$. On a

$$\forall \chi \in \widehat{G} \quad \Phi(x+y)(\chi) = \chi(x+y) = \chi(x)\chi(y) = \Phi(x)(\chi)\Phi(y)(\chi)$$

d'où

$$\forall (x, y) \in G^2 \quad \Phi(x+y) = \Phi(x)\Phi(y)$$

On note $\widehat{\widehat{n}} = \text{Card } \widehat{\widehat{G}}$. D'après le résultat de la question 2.(c), on a

$$\widehat{\widehat{n}} \leq \widehat{n} \leq n$$

Si on établit l'injectivité de Φ , on pourra en déduire $n \leq \widehat{\widehat{n}}$ et conclure. On a

$$\Phi \text{ injectif} \iff \text{Ker } \Phi = \{0_G\}$$

Soit $x \in G \setminus \{0_G\}$. On note $d = o(x)$. L'application

$$\chi: \begin{cases} \langle x \rangle & \longrightarrow \mathbb{C} \\ kx, k \in \mathbb{Z} & \longmapsto \omega^k \end{cases}$$

avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{d}}$ est un morphisme de $(\langle x \rangle, +)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$ pour les mêmes raisons que les morphismes χ_ℓ exhibés à la question 2.(d) avec $\ell \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ et c'est un morphisme non trivial puisque $\chi(x) = \omega \neq 1$. Si $d = n$, c'est-à-dire $G = \langle x \rangle$, c'est terminé. Supposons $H = \langle x \rangle \subsetneq G$. Soit $y \in G \setminus H$. On note $K = \langle H \cup \{y\} \rangle$. On montre sans difficulté

$$K = \{h + ky, (h, k) \in H \times \mathbb{Z}\}$$

On pose

$$p = \min \{k \in \mathbb{N}^* \mid ky \in H\}$$

L'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \mid ky \in H\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ puisque $ny = 0_G \in H$ et l'entier p est donc bien défini. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^p = \chi(py)$. On définit

$$\forall (h, k) \in H \times \mathbb{Z} \quad \widetilde{\chi}(h + ky) = \chi(h)z^k$$

On va vérifier que l'application $\widetilde{\chi}$ est bien définie et qu'il s'agit bien d'un élément de $\widehat{K}$ prolongeant $\chi \in \widehat{H}$. Soit $(h, k) \in H \times \mathbb{Z}$ et $(h', k') \in H \times \mathbb{Z}$ tels que $h + ky = h' + k'y$. On a $h - h' = (k' - k)y$. D'après le théorème de la divisions euclidienne, on dispose de $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$ tels que $k' - k = pq + r$. Ainsi, il vient

$$\underbrace{h - h' - pqy}_{\in H} = ry$$

Par minimalité de p , il en résulte que $r = 0$ d'où

$$k' = k + pq \quad \text{et} \quad h' = h - pqy$$

Ainsi

$$\chi(h')z^{k'} = \chi(h - pqy)z^{k+pq} = \chi(h)z^{-pq}z^{pq}z^k = \chi(h)z^k$$

ce qui prouve que l'application $\widetilde{\chi}$ est bien définie. Sans difficulté, il vient alors pour (h, k) et (h', k') dans $H \times \mathbb{Z}$

$$\widetilde{\chi}(h + ky + h' + k'y) = \widetilde{\chi}(h + h' + (k + k')y) = \chi(h + h')z^{k+k'} = \chi(h)z^j\chi(h')z^{k'} = \widetilde{\chi}(h + ky)\widetilde{\chi}(h' + k'y)$$

Par conséquent, on a bien prolongé le morphisme non trivial $\chi \in \widehat{H}$ en le morphisme également non trivial $\widetilde{\chi} \in \widehat{K}$. On itère ce processus jusqu'à prolonger χ en morphisme non trivial sur G tout entier et on conclut que l'application Φ est injective. On en déduit $n \leq \widehat{\widehat{n}}$ et par conséquent, on a $n = \widehat{\widehat{n}}$ et l'application Φ est donc injective entre deux ensembles finis de même cardinal ce qui prouve qu'elle est bijective. On conclut

L'application Φ est un isomorphisme de $(G, +)$ vers $(\widehat{\widehat{G}}, \times)$.

3.(b) On a montré précédemment $\widehat{\widehat{n}} \leq \widehat{n} \leq n$ et comme $\widehat{\widehat{n}} = n$, on conclut

$$\boxed{n = \widehat{n}}$$

Variante : On peut montrer ce résultat directement, sans passer par le bidual $\widehat{\widehat{G}}$. Pour $a \in G$, on pose

$$\forall \chi \in \widehat{G} \quad T_a(\chi) = \chi(\cdot + a)$$

Pour $a \in G$, l'application T_a à valeurs dans $\mathbb{C}^G$ est linéaire et bijective d'application réciproque T_{-a} . On pose

$$\Gamma: \begin{cases} G \longrightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^G) \\ a \longmapsto T_a \end{cases}$$

On observe $\forall (a, b) \in G^2 \quad \Gamma(a + b) = \Gamma(a)\Gamma(b) = T_a \circ T_b = T_b \circ T_a$

On en déduit $\forall a \in G \quad T_a^n = \Phi(na) = \Phi(0_G) = \text{id}$

Ainsi, le polynôme $X^n - 1$ est annulateur de T_a pour tout $a \in G$. Comme il s'agit d'un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, on en déduit que la famille $(T_a)_{a \in G}$ est une famille d'endomorphismes de $\mathbb{C}^G$ qui commutent. D'après un résultat classique de réduction, il existe une base commune de $\mathbb{C}^G$ formée de vecteurs propres des T_a pour $a \in G$. Soit u un tel vecteur propre. On a $T_a(u) = \lambda(a)u$ pour tout $a \in G$ d'où

$$\forall (a, x) \in G^2 \quad T_a(u)(x) = \lambda(a)u(x) = u(x + a)$$

S'il existe $g \in G$ tel que $u(g) = 0$, comme $u \neq 0_{\mathbb{C}^G}$, on dispose de $h \in G$ tel que $u(h) \neq 0$ et il vient

$$0 = \lambda(h - g)u(g) = u(h) \neq 0$$

ce qui est absurde. On en déduit que l'application u ne s'annule pas sur u . Enfin pour $(a, b) \in G^2$, on a

$$T_{a+b}(u) = \lambda(a + b)u \quad \text{et} \quad T_{a+b}(u) = u(\cdot + a + b) = \lambda(a)u(\cdot + b) = \lambda(a)\lambda(b)u$$

d'où $\lambda(a + b) = \lambda(a)\lambda(b)$

qu'on peut encore écrire $\frac{u(a + b)}{u(0)} = \frac{u(a)}{u(0)} \frac{u(b)}{u(0)}$

et qui prouve que $\chi = \frac{u}{u(0)}$ est un caractère. Par conséquent, on dispose d'une famille libre de caractères de cardinal égal à $\dim \mathbb{C}^G$. Enfin, la famille $(\mathbb{1}_{\{g\}})_{g \in G}$ est une famille libre et génératrice $\mathbb{C}^G$ d'où $\dim \mathbb{C}^G = \text{Card } G = n$. Ainsi, on a $\widehat{n} \geq n$ et on retrouve donc l'égalité $n = \widehat{n}$.

Exercice 8 (ENS 2017)

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et k entier non nul. Établir

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad a_{i,i}^k \leq (a^k)_{i,i}$$

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trigonalisable.

(a) Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et T triangulaire supérieure telles que $M = PTP^\top$.

(b) En déduire $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \text{Tr}(M^{2k}) \leq \text{Tr}((MM^\top)^k)$

3. Soit $U \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Justifier que UV est trigonalisable puis montrer

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{Tr}((UB)^{2k}) \leq \text{Tr}(U^{2k}V^{2k})$$

4. Soient A, B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On rappelle la *formule de Trotter-Kato* :

$$(e^{A/k}e^{B/k})^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} e^{A+B}$$

Conclure en montrant $\text{Tr}(e^{A+B}) \leq \text{Tr}(e^A e^B)$

Corrigé : 1. D'après le théorème spectral, on dispose de $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec les $\lambda_i \geq 0$ tels que $A = PDP^\top$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\|X\| = 1$. On pose $Y = P^\top X$. La matrice P est matrice d'isométrie d'où $\|Y\| = 1$ et on trouve

$$X^\top A X = Y^\top D Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$$

D'après l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe $u \geq 0 \mapsto u^k$, il vient

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \right)^k \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^k y_i^2 = Y^\top D^k Y$$

et comme on a $A^k = PD^k P^\top$, on conclut

$$\boxed{\forall X \in S(0, 1) \quad (X^\top A X)^k \leq X^\top A^k X}$$

On note $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Avec $X = E_i$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ appliqué à l'inégalité précédente, on conclut

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad a_{i,i}^k \leq (A^k)_{i,i}}$$

2.(a) On dispose de $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure telle que $M = QRQ^{-1}$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Notons $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}_1 = (u_1, \dots, u_n)$ la famille des colonnes de Q qui est une base de $\mathbb{R}^n$ puisque Q est inversible et $\mathcal{B}_2 = (v_1, \dots, v_n)$ la base obtenue par orthonormalisation de Gram-Schmidt à partir de $(u_1, \dots, u_n)$. D'après les formules de passage, on a

$$Q = \text{mat}_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B}_1 = \text{mat}_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B}_2 \times \text{mat}_{\mathcal{B}_2} \mathcal{B}_1$$

La matrice $P = \text{mat}_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B}_2$ est une matrice de passage entre deux bases orthonormées donc la matrice P est orthogonale. Puis, notant $S = \text{mat}_{\mathcal{B}_2} \mathcal{B}_1$, on a

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad u_j \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_j) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_j)$$

ce qui prouve que la matrice S est triangulaire supérieure. La matrice S est également inversible puisqu'on a $Q = PS$ avec Q inversible. On pose $T = SRS^{-1}$ matrice triangulaire supérieure comme produit de telles matrices et on a

$$M = QRQ^{-1} = PSRS^{-1}P^{-1} = PTP^{-1}$$

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles $M = PTP^{-1}$.

2.(b) Soit k entier non nul. On note $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On a

$$M^{2k} = PT^{2k}P^\top \quad \text{et} \quad (MM^\top)^k = P(TT^\top)^k P^\top$$

d'où
$$\text{Tr}(M^{2k}) = \sum_{i=1}^n t_{i,i}^{2k} \quad \text{et} \quad \text{Tr}((MM^\top)^k) = \text{Tr}((TT^\top)^k)$$

On pose $S = TT^\top = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On remarque $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et d'après le résultat de la première question, il vient

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad s_{i,i}^k \leq (S^k)_{i,i}$$

d'où
$$\sum_{i=1}^n s_{i,i}^k \leq \text{Tr}(S^k)$$

et pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$
$$s_{i,i} = \sum_{k=1}^n t_{i,k}^2 = \sum_{k=1}^i t_{i,k}^2 \geq t_{i,i}^2$$

d'où
$$t_{i,i}^{2k} \leq s_{i,i}^k$$

Ainsi
$$\sum_{i=1}^n t_{i,i}^{2k} \leq \sum_{i=1}^n s_{i,i}^k$$

On conclut
$$\boxed{\text{Tr}(M^{2k}) \leq \text{Tr}((MM^\top)^k)}$$

3. On dispose de $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $U = S^2$. Ainsi, on a

$$UV = S^2V = S(SVS)S^{-1}$$

ce qui prouve que la matrice UV est semblable à la matrice symétrique réelle SVS diagonalisable d'après le théorème spectral et donc *a fortiori* trigonalisable. D'après le résultat de la question précédente, il vient pour k entier non nul

$$\text{Tr}((UV)^{2k}) \leq \text{Tr}((UVVU)^{2k-1})$$

Et d'après la propriété fondamentale de la trace, il vient

$$\begin{aligned} \text{Tr}((UV^2U)^{2k-1}) &= \text{Tr}(UV^2U \times UV^2U \dots \times UV^2U) \\ &= \text{Tr}(V^2U^2 \times \dots \times V^2U^2) = \text{Tr}((U^2V^2)^{2k-1}) \end{aligned}$$

Par récurrence, on en déduit

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{Tr}((UB)^{2k}) \leq \text{Tr}(U^{2k}V^{2k})}$$

4. Pour k entier, on applique l'inégalité précédente avec $U = e^{A/2^k}$ et $V = e^{B/2^k}$. Ceci est licite puisqu'on a sans difficulté $U \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On obtient

$$\text{Tr}\left(\left(e^{A/2^k} e^{\frac{B}{2^k}}\right)^{2^k}\right) \leq \text{Tr}(e^A e^B)$$

et la trace étant continue (linéaire en dimension finie), il vient par passage à la limite

$$\boxed{\text{Tr}(e^{A+B}) \leq \text{Tr}(e^A e^B)}$$