ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Équations aux Dérivées Partielles - Exercices

Exercice 1 (*)

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

1. $3\dfrac{\partial f}{\partial x} - 2\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u = x + y \\ v = 2x + 3y \end{cases}$
2. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = f \quad \text{sur } \mathbb{R}^2 \smallsetminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ avec les coordonnées polaires

Corrigé : 1. Notant $(u, v) = \varphi(x, y)$, on a $f = \widetilde{f} \circ \varphi$ et par dérivation composée

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} + 2\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} + 3\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} \end{cases}$$

Ainsi, notant (E) l'équation aux dérivées partielles à résoudre, on a

$$f \in \mathrm{S_E} \iff \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} = 0 \iff \widetilde{f}(u, v) = \mathrm{A}(v) \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

On conclut $\quad \boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = \mathrm{A}(2x + 3y) \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$

2. Notant $(x, y) = \varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, on a $\widetilde{f} = f \circ \varphi$. On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r} = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta} = -r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

Ainsi, notant (E) l'équation aux dérivées partielles à résoudre, on a

$$f \in \mathrm{S_E} \iff r\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r} = \widetilde{f} \iff \widetilde{f}(r, \theta) = r\mathrm{A}(\theta) \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} \in \mathscr{C}^1(]-\pi\,;\pi\,[, \mathbb{R})$$

On conclut

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus (\mathbb{R}_- \times \{0\}) \qquad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{A}\left[\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right] \\ \text{avec} \quad \mathrm{A} \in \mathscr{C}^1(]-\pi\,;\pi\,[, \mathbb{R}) \end{array}}$$

Remarque : Quand on applique la règle de la chaîne sur une équation aux dérivées partielles, on réalise un changement de variable et il faut donc l'appliquer également au second membre f qui devient $f \circ \varphi = \widetilde{f}$.

Exercice 2 (*)

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} - 3\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$ avec $\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases}$
2. $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = f$ sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ avec les coordonnées polaires

Corrigé : 1. Notant $(u, v) = \varphi(x, y)$, on a $f = \widetilde{f} \circ \varphi$ et par dérivation composée

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} + 3\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} + \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} \end{cases}$$

Ainsi, notant (E) l'équation aux dérivées partielles à résoudre, on a

$$f \in \mathrm{S_E} \iff \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} = 0 \iff \widetilde{f}(u, v) = \mathrm{A}(v) \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

On conclut $\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = \mathrm{A}(3x + y) \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$

2. Notant $(x, y) = \varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, on a $\widetilde{f} = f \circ \varphi$. On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r} = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta} = -r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

Ainsi, notant (E) l'équation aux dérivées partielles à résoudre, on a

$$f \in \mathrm{S_E} \iff r\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r} = \widetilde{f} \iff \widetilde{f}(r, \theta) = \mathrm{A}(r)\mathrm{e}^{\theta} \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} \in \mathscr{C}^1(]\,0\,; +\infty\,[\,, \mathbb{R})$$

On conclut

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus (\mathbb{R}_- \times \{0\}) \qquad f(x, y) = \mathrm{A}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \exp\left[\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right] \\ \text{avec} \quad \mathrm{A} \in \mathscr{C}^1(]\,0\,; +\infty\,[\,, \mathbb{R}) \end{array}}$$

Exercice 3 (**)

Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{E}$$

sur $]\,0\,; +\infty\,[^2$ avec $(u, v) = (xy, x/y)$.

Corrigé : On note $\mathrm{U} =]\,0\,; +\infty\,[^2$. On cherche $f \in \mathscr{C}^2(\mathrm{U}, \mathbb{R})$ solution de l'équation aux dérivées partielles (E). Notons $(u, v) = \varphi(x, y) = (x, x + 2y)$ le changement de variables de U sur V avec $\mathrm{V} = \mathrm{U}$ (c'est un $\mathscr{C}^2$-*difféomorphisme* de U sur V, *i.e.* une bijection de $\mathscr{C}^2$ de U sur V dont la réciproque est aussi de classe $\mathscr{C}^2$). On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R} \\ \mathrm{V} \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

donc $f = \widetilde{f} \circ \varphi$. Avec la règle de la chaîne, on trouve

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = y\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = x\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} - \dfrac{x}{y^2}\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} \end{cases}$$

Toujours avec la règle de la chaîne et en regroupant les dérivées croisées d'après le théorème de Schwarz, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} + \frac{1}{y}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\right) \\ &= y\left(\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x^2}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y^2\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial v^2} \end{aligned}$$

puis
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u} - \frac{x}{y^2}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}\right) \\ &= x\left(\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\frac{x}{y^3}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} - \frac{x}{y^2}\left(\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u^2} - 2\frac{x^2}{y^2}\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u \partial v} + \frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial v^2} + 2\frac{x}{y^3}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$f \in \mathrm{S_E} \iff 2u\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} = 0 \iff \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v} = a(v)\sqrt{u} \iff \widetilde{f}(u,v) = \mathrm{A}(v)\sqrt{u} + \mathrm{B}(u)$$

avec $a \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$, et A, B dans $\mathscr{C}^2(\mathrm{U},\mathbb{R})$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{S_E} = \left\{(x,y) \in \mathrm{U} \mapsto \mathrm{A}\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{xy} + \mathrm{B}(xy) \quad \text{avec} \quad (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{C}^2(\mathrm{U},\mathbb{R})^2\right\}}$$