ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Préparation à l'oral - Feuille n°8

Exercice 1 (CCINP 2024)

Soit E l'espace des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que $(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos(2x))$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $x \mapsto \sin^2 x$.

Exercice 2 (CCINP 2024)

Soit $\mathrm{A} \subset \mathbb{C}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions avec $f_n : \mathrm{A} \to \mathbb{C}$.

1. Montrer $\sum f_n$ converge uniformément sur A $\implies$ $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CU}} 0$ sur A
2. On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad f_n(x) = nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$

   Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[\,0\,;+\infty\,[$. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 3 (Navale 2017)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer

$$\mathrm{Ker}\; u = \mathrm{Im}\; u \iff u^2 = 0 \quad \text{et} \quad \exists v \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \quad | \quad u\circ v + v \circ u = \mathrm{id}$$

Exercice 4 (Centrale 2023)

1. Montrer le théorème d'intégration des séries uniformément convergentes sur un segment.
2. Soit $\gamma \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,], \mathbb{C})$ et $f \in \mathscr{C}(\mathbb{C},\mathbb{C})$. On pose

   $$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

   et on étend cette définition au cas où la fonction f est à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $r > 0$, on note

   $$\forall t \in [\,0\,;2\pi\,] \qquad \gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

   Soit $\sum b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini et f sa somme. Montrer

   $$\forall a \in \mathbb{C} \qquad \forall r > |a| \qquad f(a) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z$$

3. En déduire que pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et pour r assez grand, on a l'égalité

   $$\exp(\mathrm{M}) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r} \mathrm{e}^z(z\mathrm{I}_n - \mathrm{M})^{-1}\,\mathrm{d}z$$

Exercice 5 (Mines 2023)

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On pose $\qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad f(x) = \varphi(x)\mathrm{e}^{-\|x\|^2}$

Montrer que la fonction f admet un maximum et un minimum sur $\mathbb{R}^n$ puis les déterminer.

Exercice 6 (Mines 2023)

Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante vérifiant

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2 \qquad f(\mathrm{AB}) = f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})$$

Montrer
$$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff f(\mathrm{A}) \neq 0$$

Exercice 7 (Centrale 2023, X 2019)

Soit $(\mathrm{G}, \star)$ un groupe fini d'ordre n. On note $\widehat{\mathrm{G}}$ l'ensemble des morphismes de $(\mathrm{G}, \star)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$.

1. (a) Rappeler la définition de l'ordre d'un élément de G. Que peut-on dire de l'ordre de $g \in \mathrm{G}$?
   (b) Pour $\varphi \in \widehat{\mathrm{G}}$, préciser les valeurs possibles pour $\varphi(g)$ avec $g \in \mathrm{G}$.
   (c) Montrer que l'ensemble $\widehat{\mathrm{G}}$ est fini. On note $\widehat{n}$ son cardinal.
2. (a) Pour $\varphi \in \widehat{\mathrm{G}} \setminus \{\mathbb{1}\}$, montrer $\sum\limits_{g \in \mathrm{G}} \varphi(g) = 0$.
   (b) Montrer que $\widehat{\mathrm{G}}$ est une partie libre de $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$.
   (c) En déduire $\widehat{n} \leqslant n$.
   (d) Si le groupe $(\mathrm{G}, \star)$ est cyclique, établir $\widehat{n} = n$.
3. On suppose $(\mathrm{G}, +)$ abélien fini.
   (a) Pour $x \in \mathrm{G}$, on note $\delta_x : \widehat{\mathrm{G}} \to \mathbb{C}, \chi \mapsto \chi(x)$. Vérifier que $\delta_x \in \widehat{\widehat{\mathrm{G}}}$ pour $x \in \mathrm{G}$ puis établir que l'application $\Phi : \mathrm{G} \to \widehat{\widehat{\mathrm{G}}}, x \mapsto \delta_x$ est un isomorphisme.
   (b) En déduire $\widehat{n}$.

Exercice 8 (ENS 2017)

1. Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et k entier non nul. Établir
$$\forall i \in [\![1 \,;\, n]\!] \qquad a_{i,i}^k \leqslant (a^k)_{i,i}$$
2. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ trigonalisable.
   (a) Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et T triangulaire supérieure telles que $\mathrm{M} = \mathrm{PTP}^\top$.
   (b) En déduire $\qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^{2k}) \leqslant \mathrm{Tr}\,((\mathrm{MM}^\top)^k)$
3. Soit $\mathrm{U} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{V} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Justifier que UV est trigonalisable puis montrer
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{Tr}\,((\mathrm{UB})^{2^k}) \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{U}^{2^k}\mathrm{V}^{2^k})$$
4. Soient A, B dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On rappelle la *formule de Trotter-Kato* :
$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{A}/k}\mathrm{e}^{\mathrm{B}/k}\right)^k \xrightarrow[k \to \infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$$
   Conclure en montrant $\qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}}) \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\mathrm{e}^{\mathrm{B}})$