**Exercice 1.** [IMT MP/MPI 2023]
Nature de la série $\sum \cos\left(n^2\pi \ln \frac{n-1}{n}\right)$ ?

***Solution :***
*(* corrigé non détaillé *)*
*On effectue un DL à l'ordre 3 du logarithme, on sort un* $(-1)^{n(n-1)} = 1$ *et on conclut à la divergence par équivalence.*

**Exercice 2.** [IMT MP/MPI 2023]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $4A^3 + 4A^2 + A = 0$.

1. Étudier la convergence et la limite éventuelle de la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
2. Qu'en déduire sur la matrice $A$ ?

***Solution :***
*(* corrigé non détaillé *)*

1. $P = 4X^3 + 4X^2 + X = X(4X^2 + 4X + 1) = X(2X + 1)^2$ *est annulateur de* $A$*, on effectue la division euclidienne de* $X^n$ *par* $P$ *et on trouve trois suites* $a_n, b_n$ *et* $c_n$ *telles que* $A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3$ *et après calcul on montre que ces trois suites tendent vers* 0*, donc* $A^n \to 0$.
2. *?*

**Exercice 3.** [Mines MP 2015]
Soient $a<0<b$ et $F$ l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]a,b[$ dont toutes les dérivées sont positives sur $]a,b[$ (*(On dit que $f$ est absolument monotone)*.

1. Montrer que $F$ est stable par somme et par produit.
2. Soit $f\in F$, soit $R_n(x)$ le reste dans la formule de Taylor appliquée à $f$ à l'ordre $n$ entre 0 et $x$. Montrer que $R_n$ est une fonction croissante sur $]0,b[$.
3. Montrer que $f\in F$ est développable en série entière autour de 0 sur $]a,b[$.

***Solution :***

1. *Soient $f,g\in F$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $f^{(k)}\geqslant 0$ et $g^{(k)}\geqslant 0$.*
   *Par linéarité de la dérivation, $(f+g)^{(k)}\geqslant 0$ et à l'aide de la formule de Leibniz $(fg)^{(k)}\geqslant 0$.*
2. *Soit $f\in F$, soit $x\in]0,b[$, on écrit :*
$$R_n(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\underset{t=xu}{=}\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$$
   *Comme $f\in F$, $f^{(n+1)}$ est croissante sur $]a,b[$, donc $x\mapsto f^{(n+1)}(xu)$ est croissante et positive sur $]0,b[$, d'où par croissance de l'intégration la croissance et positivité de la fonction $\rho_n : x\mapsto\displaystyle\int_0^1(1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$, puis par croissance et positivité de $x\mapsto\frac{x^{n+1}}{n!}$, par produit, $R_n$ est croissante sur $]0,b[$.*
3. *Soit $r=\min\{b,-a\}$ (i.e. $r$ est le plus grand réel strictement positif tel que $]-r,r[\subset]a,b[$). Montrons que $f$ est développable en série entière sur $]-r,r[$.*
   - *Cas $x=0$ : il n'y a rien à faire le reste est nul.*
   - *Cas $x>0$.*
     *Soit $x\in]0,r[$. La formule de Taylor avec reste intégral donnant :*
$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ f(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x)$$
     *Il suffit de démontrer que $R_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.*
     *Comme toutes les dérivées de $f$ sont $\geqslant 0$, la formule de Taylor précédente donne aussi : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant R_n(x)\leqslant f(x)$.*
     *La croissance de $\rho_n$ sur $]0,b[$ donne aussi, pour tout $x'\in]x,r[$ :*
$$0\leqslant\rho_n(x)\leqslant\rho_n(x')\quad\text{donc}\quad 0\leqslant\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}\leqslant\frac{R_n(x')}{x'^{n+1}}\quad\text{donc}\quad 0\leqslant R_n(x)\leqslant\left(\frac{x}{x'}\right)^{n+1}R_n(x')\leqslant\left(\frac{x}{x'}\right)^{n+1}f(x')$$
     *donc comme $\left|\frac{x}{x'}\right|<1$, par encadrement, $R_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.*
   - *Cas $x<0$.*
     *Soit $x\in]-r,0[$.*
$$|R_n(x)|=\frac{|x|^{n+1}}{n!}\rho_n(x)\underset{f^{(n+1)}\text{ croît}}{\leqslant}\frac{|x|^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-u)^n f^{(n+1)}(0)\,\mathrm{d}u=\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$
     *Comme $|x|\in]0,r[$, d'après l'item précédent $\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ est le terme général d'une série convergente, donc il tend vers 0 et par encadrement $R_n(x)$ aussi.*

**Exercice 4.** [Mines MP 2012]

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. L'ensemble $\mathcal{N}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?
2. Déterminer le sous-espace engendré par $\mathcal{N}$.

***Solution :***
*(* corrigé non détaillé *)*
*1. Non. 2. C'est* Ker(tr)*, l'inclusion dans* Ker(tr) *est facile, et on exhibe une famille libre de* $n^2 - 1$ *matrices nilpotentes.*

**Exercice 5.** [Mines MP 2015]
Résoudre l'équation différentielle d'inconnue $x$ fonction à valeurs réelles :

$$\begin{vmatrix} x'' & x' & x \\ x & x'' & x' \\ x' & x & x'' \end{vmatrix} = 0$$

***Solution :***
*En notant* $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *on observe que*

$$A := \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix} = aJ^2 + bJ + cI_3$$

*Les valeurs propres de* $J$ *étant* $1, \mathrm{j}$ *et* $\mathrm{j}^2$, *celle de* $A$ *sont* $a+b+c$, $a\mathrm{j}^2+b\mathrm{j}+c$ *et* $a\mathrm{j}+b\mathrm{j}^2+c$ *si bien que* $\det(A) = (a+b+c)(a\mathrm{j}^2+b\mathrm{j}+c)(a\mathrm{j}+b\mathrm{j}^2+c)$.
*L'équation différentielle précédente devient :*

$$(x+x'+x'')\underbrace{(\mathrm{j}^2x+\mathrm{j}x'+x'')(\mathrm{j}x+\mathrm{j}^2x'+x'')}_{=\left|\mathrm{j}^2x+\mathrm{j}x'+x''\right|^2} = 0$$

*Soit* $x$ *une solution maximale. Supposons qu'il existe* $t_0$ *tel que* $(x''+x'+x)(t_0) \neq 0$ *et considérons l'intervalle ouvert* $I = ]t_1, t_2[$ *maximal contenant* $t_0$ *sur lequel la fonction continue* $x+x'+x''$ *ne s'annule pas. Sur cet intervalle,* $\mathrm{j}^2x+\mathrm{j}x'+x'' = 0$ *donc en considérant sa partie imaginaire il vient* $x = x'$ *(et réciproquement si* $x = x'$ *alors* $x$ *est solution de* $\mathrm{j}^2x+\mathrm{j}x'+x'' = 0$*), donc sur* $I$, $x$ *est de la forme* $t \mapsto \lambda e^t$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}$.
*Montrons maintenant que* $I = \mathbb{R}$. *Si* $t_1$ *est fini, par continuité de* $x+x'+x''$, $3\lambda e^{t_1} = 0$ *donc* $\lambda = 0$ *et* $x$ *est nulle, ce qui contredit l'existence de* $t_0$. *Donc* $t_1 = -\infty$. *On montre de même que* $t_2 = +\infty$.
*Bilan : une solution de l'équation initiale est soit solution de* $x''+x'+x = 0$, *soit solution de* $x' = x$.
*Elle est de la forme* $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2}\left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$ *où* $a, b \in \mathbb{R}$ *dans le premier cas, ou* $t \mapsto \lambda e^t$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}$ *dans le deuxième cas.*

**Exercice 6.** [Mines MP 2019]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A$ et $B$ deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\mathscr{P}(\{1,\dots,n\})$. Déterminer $\mathrm{P}(A \subset B)$.

***Solution :***
*(* corrigé non détaillé *)*
*On dénombre les couples* $(A,B)$ *de parties de* $E = [\![1,n]\!]$ *telles que* $A \subset B$ *: il y en a* $3^n$. *Par équiprobabilité* $\mathrm{P}(A \subset B) = (3/4)^n$.

**Exercice 7.** [Centrale MP 2 2016]

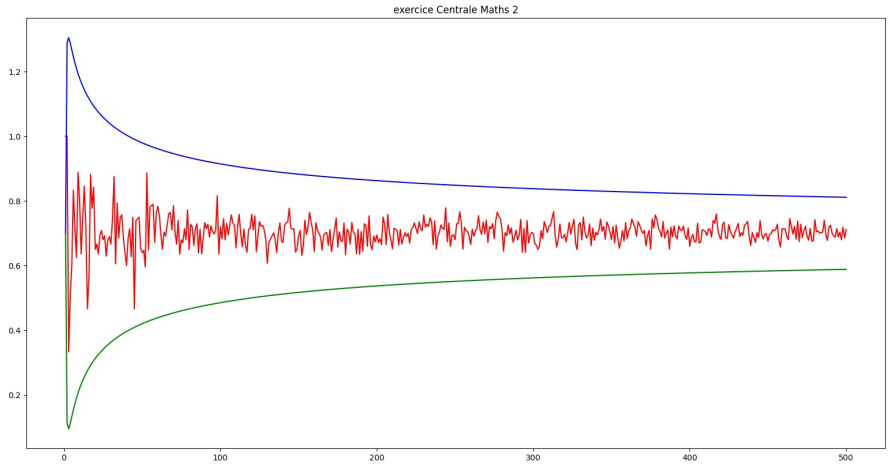
1. (a) Écrire une fonction `S(n,p)` qui simule une variable aléatoire $S_n = \frac{Y}{n}$ où $Y$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.
   (b) En déduire une fonction `test(n,p)` qui affiche les courbes interpolant les points $(k, S_k)$, puis $\left(k, p+\sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right)$ et $\left(k, p-\sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right)$. Que remarque-t-on ?
2. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1,1]$. Montrer que $\exp(tx) \leqslant \frac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)e^{t}$.
   (b) On considère une variable aléatoire $X$ telle que $|X| \leqslant 1$ et $\mathrm{E}(X) = 0$. Montrer que $\exp(tX)$ est d'espérance finie et que : $\mathrm{E}(\exp(tX)) \leqslant \mathrm{ch}\, t \leqslant \exp(t^2/2)$.
3. (a) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes telles que, pour tout $i$, $|X_i| \leqslant a_i$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que $\mathrm{E}(\exp(tS_n)) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer : $\mathrm{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$.
   (c) En choisissant une bonne valeur de $t$, montrer : $\mathrm{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(\frac{-\varepsilon}{2\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)$.
   (d) Commenter le résultat observé à la première question.

***Solution :***

1. *On saisit :*

```
from random import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def bernoulli(p) :
    if random()<p :
        return 1
    else :
        return 0

def binomial(n,p) :
    S=0
    for k in range(n) :
        S+=bernoulli(p)
    return S

def S(n,p) :
    return binomial(n,p)/n

def test(n,p) :
    x=[k for k in range(1,n+1)]
    y=[S(k,p) for k in range(1,n+1)]
    z=[p+np.sqrt(np.log(k)/k) for k in range(1,n+1)]
    w=[p-np.sqrt(np.log(k)/k) for k in range(1,n+1)]
    plt.plot(x,y,'r',x,z,'b',x,w,'g')
    plt.title("exercice Centrale Maths 2")
    plt.show()
```

*ce qui renvoie :*




2. (a) *Par convexité de* exp *avec* $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1-x) \geqslant 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1+x) \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ *et* $tx = _l ambd a_1(-t) + \lambda_2 t$.

   (b) *X est bornée, donc* $\exp(tX)$ *aussi, elle est d'espérance finie.*
   *On a alors*
   $$\mathrm{E}(e^{tX}) \leqslant \frac{e^{-t}+e^{t}}{2} - \frac{e^{-t}}{2}\mathrm{E}(X) + \frac{e^{t}}{2}\underbrace{\mathrm{E}(X)}_{=\mathrm{E}(X)} = \mathrm{ch}(t)$$
   *On montre (récurrence) que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $(2n)! \geqslant 2^n n!$ *ce qui permet d'obtenir :*
   $$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^2)^n}{2^n n!} = \exp(t/2)$$
   *ce qui démontre l'encadrement demandé.*

3. (a) *On peut supposer les* $a_i > 0$. *On a* $|S_n| \leqslant \sum_{i=1}^n a_i$ *donc* $S_n$ *est bornée, elle est d'espérance finie, et* $\mathrm{E}(S_n) = 0$ *par linéarité.*
   *On calcule alors :*
   $$\mathrm{E}(\exp(tX)) \underset{\text{ind.}}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}(\underbrace{\exp(tX_i)}_{=\exp(a_i t X_i/a_i)}) \underset{2.(b)}{\leqslant} \exp(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2)$$

   (b) *On suppose* $t > 0$ *et on applique l'inégalité de Markov à la variable* $e^{t(S_n-\varepsilon)}$ *positive d'espérance finie (en notant* $\sigma = \sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$*) :*
   $$\mathrm{P}(S_n > \varepsilon) = \mathrm{P}(e^{t(S_n-\varepsilon)} > 1) \leqslant \mathrm{E}(e^{t(S_n-\varepsilon)}) \leqslant e^{-t\varepsilon}\mathrm{E}(^{tS_n}) \leqslant e^{-t\varepsilon+\sigma t^2/2}$$

   (c) *La fonction* $\varphi\ t \mapsto -t\varepsilon + \sigma t^2/2$ *admet un minimum en* $t = \varepsilon/\sigma$ *et cela donne l'inégalité demandée.*

   (d) *On peut faire mieux, en utilisant* $t < 0$ *et* $\{S_n < -\varepsilon\}$ *la démarche précédente conduit à* $\mathrm{P}(S_n < -\varepsilon) \leqslant \exp(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma})$, *ce qui donne :*
   $$\forall\, \varepsilon > 0,\ \mathrm{P}(|S_n| > \varepsilon) \leqslant 2\exp(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma})$$
   *On peut alors appliquer le résultat avec* $X_i = B_i - p$ *où* $B_i \sim \mathscr{B}(p)$ *et les* $B_i$ *sont indépendantes, car alors* $X_i$ *est centrée et* $a_i = 1$. *On note* $Y - np = S_n$ *et avec* $\varepsilon = n\sqrt{\frac{\ln k}{k}} > 0$ *il vient :*
   $$\forall \geqslant 1,\ \forall\, n \geqslant 1,\ \mathrm{P}\left(\left|\frac{Y}{n} - p\right| > \sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right) \leqslant 2\exp(-n\frac{\ln k}{2k})$$
   *Pour* $2 \leqslant k \leqslant n$, *le terme de droite tend vers* 0 *ce qui confirme le résultat observé.*