ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Préparation à l'oral python - Feuille n°2

Exercice 1 (Centrale 2019)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est *équirépartie modulo* 1 si

$$\forall\,[\,a\,;b\,]\subset[\,0\,;1\,]\qquad \frac{1}{n}\,\mathrm{Card}\,\{k\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]\mid\{u_k\}\in[\,a\,;b\,]\}\xrightarrow[n\to\infty]{} b-a$$

avec
$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \{x\}=x-\lfloor x\rfloor$$

la *partie fractionnaire* de x. On pose

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad \forall\,[\,a\,;b\,]\subset[\,0\,;1\,]\qquad c_n(a,b)=\mathrm{Card}\,\{k\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]\mid\{u_k\}\in[\,a\,;b\,]\}$$

1. On pose
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad u_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$
   (a) Quel est l'ensemble des suites réelles $(w_n)_{n\geqslant 1}$ telles que
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad w_{n+2}=w_{n+1}+w_n$$
   (b) Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de limite nulle telle que $(u_n+v_n)_{n\geqslant 1}$ est à valeurs entières.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas équirépartie modulo 1.

2. (a) Écrire une fonction d'arguments u, n, a, b qui renvoie $c_n(a,b)$.
   (b) Soit $u=(\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$, $a=0$ et $b=\dfrac{1}{2}$. Tracer les 100 premiers termes de la suite $(c_n(a,b)/n)_{n\geqslant 1}$. Que peut-on conjecturer ?
   (c) Soit $u=(\ln(n))_{n\geqslant 1}$, $a=0$ et $b=\dfrac{1}{2}$. Tracer les 100 premiers termes de la suite $(c_n(a,b)/n)_{n\geqslant 1}$. Que peut-on conjecturer ?
   (d) Soit $u=\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)_{n\geqslant 1}$, $a=0$ et $b=\dfrac{1}{2}$. Tracer les 100 premiers termes de la suite $(c_n(a,b)/n)_{n\geqslant 1}$. Que constate-t-on ? Tester avec un autre choix de a et b.

3. On montre désormais que la suite $(\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1. Soit $0\leqslant a\leqslant b<1$ et $n\geqslant 3$.
   (a) Montrer que pour $k\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]$ tel que $\{u_k\}\in[\,a\,;b\,]$, il existe $p\in[\![\,1\,;\,\lfloor\sqrt{n}\rfloor\,]\!]$ tel que
$$(p+a)^2\leqslant k\leqslant(p+b)^2$$
   (b) En déduire
$$c_n(a,b)\leqslant\sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\left(b^2-a^2+1+2p(b-a)\right)$$
   (c) Réciproquement, montrer que si k est un entier tel qu'il existe $p\in[\![\,1\,;\,\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor-1\,]\!]$ vérifiant $(p+a)^2\leqslant k\leqslant(p+b)^2$, alors $\{u_k\}\in[\,a\,;b\,]$ et $k\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]$.
   (d) En déduire
$$c_n(a,b)\geqslant\sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor-1}\left(b^2-a^2-1+2p(b-a)\right)$$

(e) Conclure que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1.

Corrigé : 1.(a) C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - r - 1 = 0$$

Ainsi, l'ensemble des suites solutions est

$$\boxed{\operatorname{Vect}\left(n \mapsto \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, n \mapsto \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$$

1.(b) On choisit $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

En prolongeant la suite $(u_n)_n$ avec $u_0 = 1$, posant $w_n = u_n + v_n$, on a $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$ avec $w_0 = 2$ et $w_1 = 1$ d'où $w_n \in \mathbb{N}$ pour n entier par récurrence double. Par ailleurs, on a $\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$ et on conclut

$$\boxed{\text{Il existe } (v_n)_{n\geqslant 1} \text{ de limite nulle telle que } (u_n + v_n)_{n\geqslant 1} \text{ est à valeurs entières.}}$$

1.(c) On observe $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_{2n+1} \in \left]-1\,;0\right[\qquad v_{2n} \in \left]0\,;1\right[$

Ainsi, pour n entier non nul, on a

$$u_{2n} + v_{2n} - 1 < u_{2n} < u_{2n} + v_{2n}$$

et

$$u_{2n+1} + v_{2n+1} < u_{2n+1} < u_{2n+1} + v_{2n+1} + 1$$

d'où

$$\{u_{2n}\} = 1 - v_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \{u_{2n+1}\} = -v_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi, avec $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = \dfrac{2}{3}$, la suite $(c_n(a,b))_{n\geqslant 1}$ est bornée d'où $\dfrac{1}{n}c_n(a,b) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et par conséquent

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ n'est pas équirépartie modulo 1.}}$$

2.(a) On saisit :

```
tu=[lambda n:np.sqrt(n), lambda n:np.log(n), lambda n:((1+np.sqrt(5))/2)**n]
a,b=0,.5
tn=range(1,101)
for u in tu:
    tq=[c(u,n,a,b)/n for n in tn]
    plt.plot(tn,tq)
    plt.grid();plt.show()

a,b=1/3,2/3
tq=[c(u,n,a,b)/n for n in tn]
plt.plot(tn,tq)

plt.grid();plt.show()
```

2.(b) On observe :

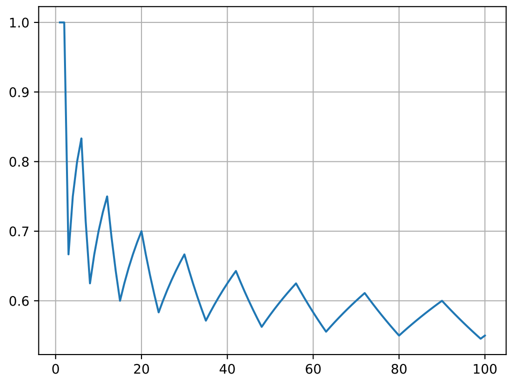


FIGURE 1 – Tracé avec $u = (\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$

La suite semble équirépartie modulo 1.

2.(c) On observe

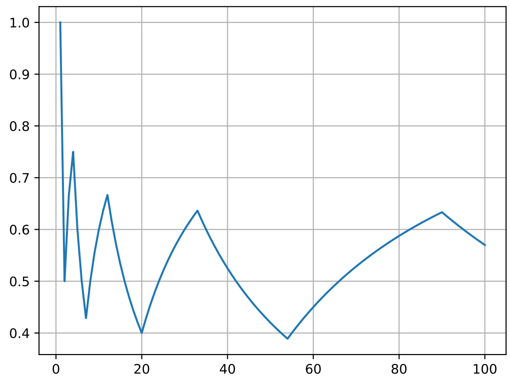
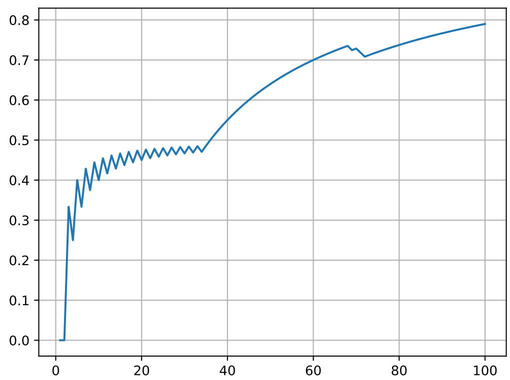


FIGURE 2 – Tracé avec $u = (\ln(n))_{n\geqslant 1}$

La suite semble équirépartie modulo 1.

2.(d) On observe



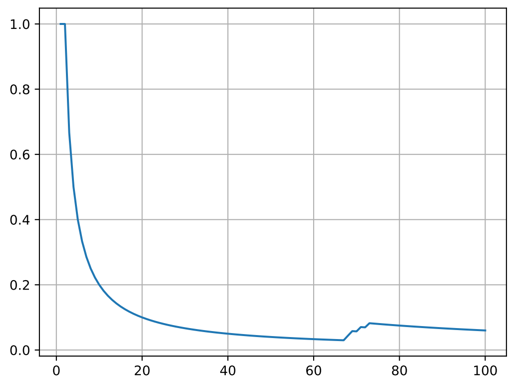


FIGURE 3 – Tracé avec $u = \left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)_{n\geqslant 1}$

La suite ne semble pas équirépartie modulo 1.

3.(a) Soit $k \in [\![1 ; n]\!]$ tel que $\{u_k\} \in [\, a\,; b\,]$, c'est-à-dire

$$a \leqslant \sqrt{k} - \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor \leqslant b$$

autrement dit
$$a + \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor \leqslant \sqrt{k} \leqslant b + \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$$

Par croissance de $u \mapsto u^2$ sur $\mathbb{R}_+$, on conclut

$$\boxed{\text{Le choix de } p = \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor \text{ convient.}}$$

3.(b) D'après ce qui précède, on a

$$\{k \in [\![1\,;\,n]\!] \mid \{u_k\} \in [\,a\,;b\,]\} \subset \bigcup_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} [\,(p+a)^2\,;(p+b)^2\,] \cap \mathbb{N}$$

d'où $\qquad c_n(a,b) \leqslant \sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} (\lfloor (p+b)^2 \rfloor - \lceil (p+a)^2 \rceil + 1) \leqslant \sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} ((p+b)^2 - (p+a)^2 + 1)$

Ainsi $$\boxed{c_n(a,b) \leqslant \sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} (b^2 - a^2 + 1 + 2p(b-a))}$$

3.(c) Soient k et p entiers vérifiant les conditions imposées. On a

$$0 \leqslant a \leqslant \sqrt{k} - p \leqslant b < 1$$

d'où $p = \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$ et par conséquent $\{u_k\} \in [\,a\,;b\,]$ et

$$1 \leqslant p \leqslant \sqrt{k} < p+1 \leqslant \left\lfloor \sqrt{n+1} \right\rfloor$$

d'où $$1 \leqslant k < n+1$$

Ainsi $$\boxed{\{u_k\} \in [\,a\,;b\,] \quad \text{et} \quad k \in [\![1\,;\,n]\!]}$$

3.(d) Pour p entier, on a $\qquad p+b < p+1 \leqslant p+1+a$

ce qui prouve que les ensembles $[\,(p+a)^2\,;(p+b)^2\,] \cap \mathbb{N}$ avec $p \in [\![1\,;\, \left\lfloor\sqrt{n+1}\right\rfloor - 1]\!]$ sont deux à deux disjoints. Ainsi, on a

$$\bigsqcup_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - 1} [\,(p+a)^2\,;(p+b)^2\,] \cap \mathbb{N} \subset \{k \in [\![1\,;\,n]\!] \mid \{u_k\} \in [\,1\,;n\,]\}$$

Passant au cardinal, il vient

$$\sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - 1} \operatorname{Card} [\,(p+a)^2\,;(p+b)^2\,] \cap \mathbb{N} \leqslant c_n(a,b)$$

puis $\quad c_n(a,b) \geqslant \sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - 1} (\lfloor (p+b)^2 \rfloor - \lceil (p+a)^2 \rceil + 1) \geqslant \sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - 1} ((p+b)^2 - (p+a)^2 - 1)$

Ainsi $$\boxed{c_n(a,b) \geqslant \sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - 1} (b^2 - a^2 - 1 + 2p(b-a))}$$

3.(e) Pour $0 \leqslant a \leqslant b < 1$, on trouve

$$\frac{1}{n} c_n(a,b) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\frac{(\sqrt{n})^2}{2}(b-a) \xrightarrow[n\to\infty]{} b-a$$

Les encadrements précédemment établis valent aussi pour $0 < a$ et $b = 1$ et le cas $a = 0$, $b = 1$ étant trivial, on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est équirépartie modulo 1.}}$$

Exercice 2 (Centrale 2017)

On définit la suite de Fibonacci $(\mathrm{F}_n)_n$ par $\mathrm{F}_0 = 0$, $\mathrm{F}_1 = 1$ et $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$ pour tout n entier. Pour n entier, on pose $\mathrm{A}_n = \left(\mathrm{F}_{i+j}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (les coefficients sont indicés entre 0 et $n-1$).

1. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $\mu = \min \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M})$ et $\lambda = \max \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M})$. Montrer
$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \mu \mathrm{X}^\top \mathrm{X} \leqslant \mathrm{X}^\top \mathrm{M} \mathrm{X} \leqslant \lambda \mathrm{X}^\top \mathrm{X}$$
2. Écrire une fonction `fibo(n)` d'argument n entier qui renvoie $[\mathrm{F}_0, \ldots, \mathrm{F}_n]$.
3. Écrire une fonction `A(n)` d'argument n entier qui renvoie A_n.
4. Afficher les valeurs propres de A_n pour $n \in [\![\, 2\,;\, 10\,]\!]$. Que peut-on conjecturer ?
5. Déterminer $\dim \mathrm{Ker}\, \mathrm{A}_n$ pour n entier avec $n \geqslant 2$.
6. Soit n entier avec $n \geqslant 2$. Montrer que $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^\top \mathrm{A}_n \mathrm{X}$ n'est ni négative, ni positive.
7. En déduire que pour n entier avec $n \geqslant 2$, la matrice A_n admet exactement une valeur propre strictement positive α_n et une valeur propre strictement négative β_n.
8. Représenter les termes des suites $(\alpha_n)_{n\in[\![\,0\,;\,20\,]\!]}$ et $(\beta_n)_{n\in[\![\,0\,;\,20\,]\!]}$.
9. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n + \beta_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

Corrigé : 1. Soit $(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de M dont l'existence est assurée par le théorème spectral. Notant $\mathrm{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathrm{U}_i$ pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec les x_i réels et λ_i les valeurs propres associées aux U_i, il vient
$$\mathrm{X}^\top \mathrm{M} \mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda \mathrm{X}^\top \mathrm{X}$$
et de même pour la minoration. Ainsi
$$\boxed{\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \mu \mathrm{X}^\top \mathrm{X} \leqslant \mathrm{X}^\top \mathrm{M} \mathrm{X} \leqslant \lambda \mathrm{X}^\top \mathrm{X}}$$

2. On saisit :

```
def fibo(n):
    res=[0,1]
    for k in range(1,n):
        res.append(res[-1]+res[-2])
    return res[:n+1]
```

3. On saisit :

```
def A(n):
    res=np.zeros((n,n))
    tf=fibo(2*(n-1))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            res[i,j]=tf[i+j]
    return res
```

4. On saisit :

```
for n in range(2,11):
    print("\nn=",n)
    print(alg.eigvals(A(n)))
```

On observe :

```
n= 2
[-0.61803399  1.61803399]

n= 3
[  4.64575131e+00  -6.45751311e-01   1.89580158e-16]

n= 4
[  1.27082039e+01  -7.08203932e-01  -3.37878619e-17   3.78373308e-16]
...
```

On conjecture qu'il y a exactement une valeur propre strictement positive, une strictement négative et que zéro est de multiplicité $n-2$.

5. Soit n entier avec $n \geqslant 2$. Avec les opérations $\mathrm{C}_k \leftarrow \mathrm{C}_k - \mathrm{C}_{k-1} - \mathrm{C}_{k-2}$ pour $k \in [\![3\,;\, n]\!]$, on annule les colonne $\mathrm{C}_3, \ldots, \mathrm{C}_n$. Les deux premières colonnes étant non nulles et échelonnées, il vient avec le théorème du rang :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2 \qquad \dim \operatorname{Ker} \mathrm{A}_n = n-2}$$

6. Soit n entier avec $n \geqslant 2$. Pour $\mathrm{X}^\top = \begin{pmatrix} x & y & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$, il vient

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{A}_n \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

D'après le théorème spectral, on a $\mathrm{A}_2 = \mathrm{PDP}^\top$ avec $\mathrm{D} = \operatorname{diag}(\varphi, \psi)$ où $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. On note ${\mathrm{X}_2}^\top = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ et on pose $\mathrm{U} = \mathrm{P}^\top \mathrm{X}_2$ avec $\mathrm{U}^\top = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}$. Il vient

$${\mathrm{X}_2}^\top \mathrm{A}_2 \mathrm{X}_2 = \mathrm{U}^\top \mathrm{D} \mathrm{U} = \varphi u^2 + \psi v^2$$

Comme $\mathrm{X}_2 \mapsto \mathrm{P}^\top \mathrm{X}_2$ est bijective, on peut choisir $(u,v) = (1,0)$ ou $(0,1)$ et par conséquent

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^\top \mathrm{A}_n \mathrm{X} \text{ n'est ni négative, ni positive.}}$$

Remarque : On peut procéder sans réduction ici car le calcul est simple :

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{A}_n \mathrm{X} = 2xy + y^2 = (x+y)^2 - x^2$$

Les choix de $(x,y) = (0,1)$ ou $(1,-1)$ permettent de conclure.

7. Soit n entier avec $n \geqslant 2$. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{X}^\top \mathrm{A}_n \mathrm{X} > 0$. D'après le résultat de la première question, on a

$$\alpha_n \|\mathrm{X}\|^2 \geqslant \mathrm{X}^\top \mathrm{M} \mathrm{X} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_n > 0$$

et de même, on prouve $\qquad \beta_n < 0$

D'après le théorème spectral, la matrice A_n symétrique réelle est diagonalisable. Ainsi, on a $\dim \mathrm{E}_0(\mathrm{A}_n) = \dim \operatorname{Ker} \mathrm{A}_n = n - 2$ et on conclut

$$\boxed{\text{La matrice } \mathrm{A}_n \text{ admet exactement une valeur propre strictement positive } \alpha_n \text{ et une valeur propre strictement négative } \beta_n.}$$

8. On saisit :

```
tn=range(2,20)
tt=[sum(alg.eigvals(A(n))) for n in tn]
ta=[max(alg.eigvals(A(n))) for n in tn]
plt.plot(tn,tt,'bo--')
plt.grid();plt.show()
plt.plot(tn,ta,'ro--')
plt.grid();plt.show()
```

On observe :

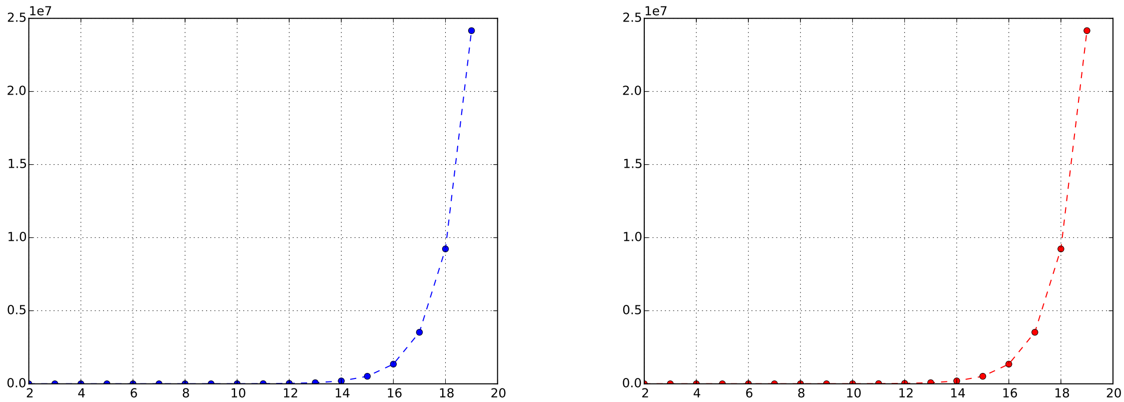


FIGURE 4 – Tracé des suites $(\alpha_n + \beta_n)_n$ et $(\alpha_n)_n$

9. Soit n entier. La matrice A_n est semblable à $\operatorname{diag}(\alpha_n, \beta_n, 0, \ldots, 0)$ d'où $\operatorname{Tr}(\mathrm{A}_n) = \alpha_n + \beta_n$. En calculant les premières valeurs de la suite $(\mathrm{F}_n)_n$, on remarque que $\mathrm{F}_n \geqslant n$ pour $n \geqslant 5$ ce qu'on peut aisément démontrer par récurrence double. Par comparaison et en observant que $\alpha_n \geqslant \alpha_n + \beta_n$, on conclut

$$\boxed{\alpha_n + \beta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty}$$

Exercice 3 (Centrale 2019)

On effectue n lancers de pièces indépendants et la probabilité d'obtenir pile au k-ième lancer est notée p_k. On note X_n le nombre de piles obtenus au cours de ces n lancers et π_n la probabilité que X_n soit pair.

1. (a) Écrire une fonction `pi(n,p)` qui donne une estimation de π_n pour la fonction p. Elle doit effectuer 1000 simulations.

   (b) Représenter π_n en fonction de $n \in [\![0\,;\,100]\!]$ pour $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)}$ puis $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)^2}$.

   (c) Représenter π_{100} en fonction de $\alpha \in [\,0\,;6\,]$ pour $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)^\alpha}$.

2. Exprimer π_n en fonction des p_k. On pourra considérer la suite $u_n = \pi_n - \dfrac{1}{2}$.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi_n$ quand $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)}$ puis $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)^2}$. Que se passe-t-il quand la pièce est équilibrée ?
4. Montrer que si $p_k < \dfrac{1}{2}$ pour tout k entier, alors $(\pi_n)_n$ tend vers une limite $\ell \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$.

   Montrer que $\ell = \dfrac{1}{2}$ si et seulement si la série $\sum p_n$ diverge.

Corrigé : 1.(a) On saisit :

```
def pi(n,p):
    N=1000
    res=0
    for i in range(N):
        S=0
        for k in range(1,n+1):
            if rd.rand()<p(k):
                S+=1
        if S%2==0:
            res+=1
    return res/N
```

1.(b) On saisit :

```
def p1(n):
    return 1/(2*(n+1))

def p2(n):
    return 1/(2*(n+1)**2)

tn=range(101)
tpi1=[pi(n,p1) for n in tn]
plt.scatter(tn,tpi1)
plt.grid();plt.show()

tpi2=[pi(n,p2) for n in tn]
plt.scatter(tn,tpi2)
plt.grid();plt.show()
```

On observe :

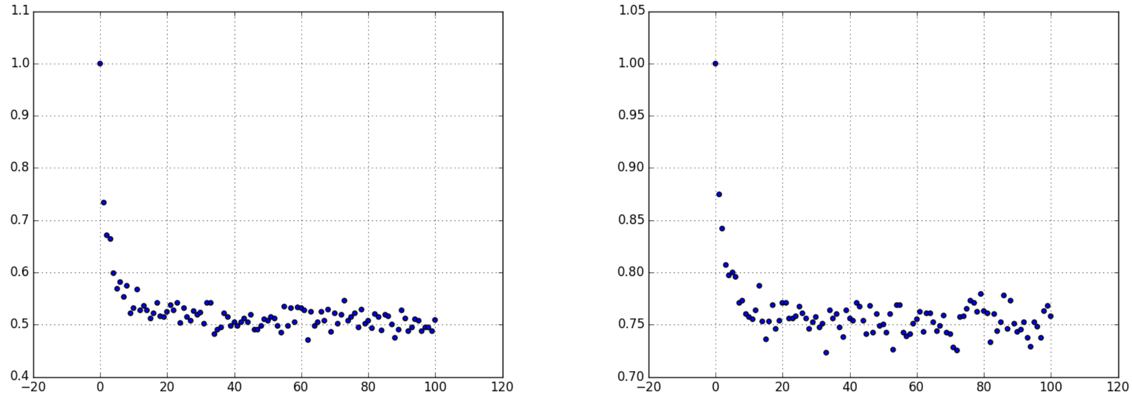


FIGURE 5 – Tracé de $(\pi_n)_n$

On conjecture que pour chacun des scénarios considérés

$$\boxed{\pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{4}}$$

1.(c) On saisit :

```
ta=np.linspace(0,6,100)
tpi3=[pi(100,lambda n:1/(2*(n+1)**a)) for a in ta]
plt.plot(ta,tpi3)
plt.grid();plt.show()
```

On observe :

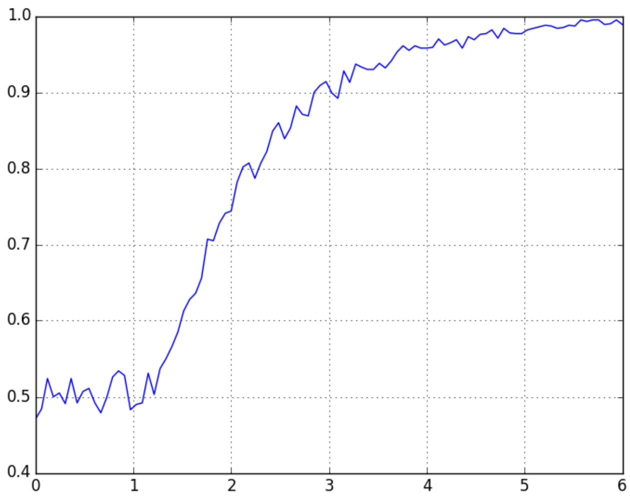


FIGURE 6 – Tracé du graphe $\alpha \mapsto \pi_{100}$

On conjecture $$\boxed{\forall \alpha \in [\,0\,;1\,] \qquad \lim_{n\to+\infty} \pi_n = \frac{1}{2}}$$

2. Soit n entier. D'après la formule des probabilités totales, on obtient

$$\begin{aligned}\pi_{n+1} &= \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n+1} \text{ pair}, \mathrm{X}_n \text{ pair}) + \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n+1} \text{ pair}, \mathrm{X}_n \text{ impair})\\ &= \mathbb{P}(\mathrm{F}_{n+1}, \mathrm{X}_n \text{ pair}) + \mathbb{P}(\mathrm{P}_{n+1}, \mathrm{X}_n \text{ impair})\end{aligned}$$

Par indépendance des lancers, on trouve

$$\pi_{n+1} = (1 - p_{n+1})\pi_n + p_{n+1}(1 - \pi_n)$$

Puis
$$u_{n+1} + \frac{1}{2} = (1 - p_{n+1})\left(u_n + \frac{1}{2}\right) + p_{n+1}\left(\frac{1}{2} - u_n\right)$$

d'où
$$u_{n+1} = (1 - 2p_{n+1})u_n$$

Par ailleurs, on a $\pi_0 = 1$ d'où $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et on en déduit, par récurrence ou avec un produit téléscopique

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2} - p_k\right)}$$

3. On suppose $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)}$ pour n entier. On a

$$u_n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)}\right) = \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\right) = \frac{1}{2(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et par conséquent
$$\boxed{\text{Si } p_n = \frac{1}{2(n+1)} \text{ pour } n \text{ entier, alors } \pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}.}$$

On suppose ensuite $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)^2}$ pour n entier. On a

$$u_n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)^2}\right) = \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\frac{k+2}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}\frac{n+2}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4}$$

Ainsi
$$\boxed{\text{Si } p_n = \frac{1}{2(n+1)^2} \text{ pour } n \text{ entier, alors } \pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{4}.}$$

4. Soit n entier. On a
$$\ln(u_n) = -\ln(2) + \sum_{k=1}^{n}\ln(1 - 2p_k)$$

Supposons $p_k < \dfrac{1}{2}$ pour tout k entier. Il s'ensuit $1 \geqslant 1 - 2p_k > 0$ pour tout k entier. La série $\sum \ln(1 - 2p_k)$ est donc à terme négatifs. Si $(p_k)_k$ ne tend pas vers zéro, la série diverge grossièrement donc sa somme partielle tend vers $-\infty$. Si $(p_k)_k$ tend vers zéro, on a $\ln(1 - 2p_k) \underset{k\to+\infty}{\sim} -2p_k$ et les séries $\sum \ln(1-2p_k)$ et $\sum p_k$ sont donc de même nature. Si $\sum p_k$ diverge, la somme partielle de la série $\sum \ln(1 - 2p_k)$ tend vers $-\infty$ et sinon, elle tend vers une limite finie négative S d'où $\pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell = \dfrac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{S}})$. On conclut

$$\boxed{\text{Si } p_k < \frac{1}{2} \text{ pour } k \text{ entier, alors } \pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right].}$$

Et l'étude précédente montrer que si $\sum p_n$ diverge, alors $\ell = \dfrac{1}{2}$ et si $\sum p_n$ converge, alors on a $\ell \in \left]\dfrac{1}{2}\,;1\right]$. Ainsi

$$\boxed{\ell = \frac{1}{2} \iff \sum p_n \text{ diverge}}$$

Remarque : Si $p_k < \dfrac{1}{2}$ pour k entier, on peut aussi observer

$$u_{n+1} = (1 - 2p_{n+1})u_n < u_n$$

La suite $(u_n)_n$ est décroissante, minorée par 0 donc convergente dans $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$ d'où le premier résultat annoncé sur ℓ.