Préparation à l'oral python - Feuille n°2

Exercice 1 (Centrale 2019)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est *équirépartie modulo* 1 si

$$\forall\, [\,a\,;b\,] \subset [\,0\,;1\,] \qquad \frac{1}{n}\,\mathrm{Card}\,\{k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \mid \{u_k\} \in [\,a\,;b\,]\} \xrightarrow[n\to\infty]{} b-a$$

avec

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$$

la *partie fractionnaire* de x. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall\, [\,a\,;b\,] \subset [\,0\,;1\,] \qquad c_n(a,b) = \mathrm{Card}\,\{k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \mid \{u_k\} \in [\,a\,;b\,]\}$$

1. On pose $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$
   (a) Quel est l'ensemble des suites réelles $(w_n)_{n\geqslant 1}$ telles que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$$
   (b) Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de limite nulle telle que $(u_n+v_n)_{n\geqslant 1}$ est à valeurs entières.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas équirépartie modulo 1.
2. (a) Écrire une fonction d'arguments u, n, a, b qui renvoie $c_n(a,b)$.
   (b) Soit $u = (\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$, $a = 0$ et $b = \dfrac{1}{2}$. Tracer les 100 premiers termes de la suite $(c_n(a,b)/n)_{n\geqslant 1}$. Que peut-on conjecturer ?
   (c) Soit $u = (\ln n)_{n\geqslant 1}$, $a = 0$ et $b = \dfrac{1}{2}$. Tracer les 100 premiers termes de la suite $(c_n(a,b)/n)_{n\geqslant 1}$. Que peut-on conjecturer ?
   (d) Soit $u = \left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)_{n\geqslant 1}$, $a = 0$ et $b = \dfrac{1}{2}$. Tracer les 100 premiers termes de la suite $(c_n(a,b)/n)_{n\geqslant 1}$. Que constate-t-on ? Tester avec un autre choix de a et b.
3. On montre désormais que la suite $(\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1. Soit $0 \leqslant a \leqslant b < 1$ et $n \geqslant 3$.
   (a) Montrer que pour $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$ tel que $\{u_k\} \in [\,a\,;b\,]$, il existe $p \in [\![\,1\,;\,\lfloor\sqrt{n}\rfloor\,]\!]$ tel que
   $$(p+a)^2 \leqslant k \leqslant (p+b)^2$$
   (b) En déduire $$c_n(a,b) \leqslant \sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} (b^2 - a^2 + 1 + 2p(b-a))$$
   (c) Réciproquement, montrer que si k est un entier tel qu'il existe $p \in [\![\,1\,;\,\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - 1\,]\!]$ vérifiant $(p+a)^2 \leqslant k \leqslant (p+b)^2$, alors $\{u_k\} \in [\,a\,;b\,]$ et $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$.
   (d) En déduire $$c_n(a,b) \geqslant \sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - 1} (b^2 - a^2 - 1 + 2p(b-a))$$
   (e) Conclure que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1.

Exercice 2 (Centrale 2017)

On définit la suite de Fibonacci $(\mathrm{F}_n)_n$ par $\mathrm{F}_0 = 0$, $\mathrm{F}_1 = 1$ et $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$ pour tout n entier. Pour n entier, on pose $\mathrm{A}_n = \big(\mathrm{F}_{i+j}\big)_{0\leqslant i,j\leqslant n-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (les coefficients sont indicés entre 0 et $n-1$).

1. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $\mu = \min \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M})$ et $\lambda = \max \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M})$. Montrer
$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \mu \mathrm{X}^\top \mathrm{X} \leqslant \mathrm{X}^\top \mathrm{M}\mathrm{X} \leqslant \lambda \mathrm{X}^\top \mathrm{X}$$
2. Écrire une fonction `fibo(n)` d'argument n entier qui renvoie $[\mathrm{F}_0, \ldots, \mathrm{F}_n]$.
3. Écrire une fonction `A(n)` d'argument n entier qui renvoie A_n.
4. Afficher les valeurs propres de A_n pour $n \in [\![\, 2\,;\, 10 \,]\!]$. Que peut-on conjecturer ?
5. Déterminer $\dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{A}_n$ pour n entier avec $n \geqslant 2$.
6. Soit n entier avec $n \geqslant 2$. Montrer que $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^\top \mathrm{A}_n \mathrm{X}$ n'est ni négative, ni positive.
7. En déduire que pour n entier avec $n \geqslant 2$, la matrice A_n admet exactement une valeur propre strictement positive α_n et une valeur propre strictement négative β_n.
8. Représenter les termes des suites $(\alpha_n)_{n\in[\![\, 0\,;\,20 \,]\!]}$ et $(\beta_n)_{n\in[\![\, 0\,;\,20 \,]\!]}$.
9. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n + \beta_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

Exercice 3 (Centrale 2019)

On effectue n lancers de pièces indépendants et la probabilité d'obtenir pile au k-ième lancer est notée p_k. On note X_n le nombre de piles obtenus au cours de ces n lancers et π_n la probabilité que X_n soit pair.

1. (a) Écrire une fonction `pi(n,p)` qui donne une estimation de π_n pour la fonction p. Elle doit effectuer 1000 simulations.
   (b) Représenter π_n en fonction de $n \in [\![\, 0\,;\, 100 \,]\!]$ pour $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)}$ puis $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)^2}$.
   (c) Représenter π_{100} en fonction de $\alpha \in [\,0\,;6\,]$ pour $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)^\alpha}$.
2. Exprimer π_n en fonction des p_k. On pourra considérer la suite $u_n = \pi_n - \dfrac{1}{2}$.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi_n$ quand $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)}$ puis $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)^2}$. Que se passe-t-il quand la pièce est équilibrée ?
4. Montrer que si $p_k < \dfrac{1}{2}$ pour tout k entier, alors $(\pi_n)_n$ tend vers une limite $\ell \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$.
   Montrer que $\ell = \dfrac{1}{2}$ si et seulement si la série $\sum p_n$ diverge.