

Préparation à l'oral - Feuille n°5

Exercice 1 (CCINP 2024)

Soient E et F deux $\mathbb{R}$ -ev normés.

1. Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(P1) $f \in \mathcal{C}(E, F)$;

(P2) f est continue en 0_E ;

(P3) $\exists k > 0 \quad | \quad \forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.

2. Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On pose

$$\forall f \in E \quad \varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt$$

Montrer que φ est linéaire et continue.

Corrigé : Exercice 36 CCPINP 2024

Exercice 2 (CCINP 2024)

Soit p projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur le plan P le plan d'équation $x + y + z = 0$ parallèlement à la droite D d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$
2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Corrigé : Exercice 71 CCPINP 2024

Exercice 3 (CCINP 2024)

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver

$$p \wedge a = 1 \quad \text{et} \quad p \wedge b = 1 \quad \implies \quad p \wedge (ab) = 1$$

2. Soit p un nombre premier.

(a) Prouver que pour tout $k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k}k!$ puis en déduire p divise $\binom{p}{k}$.

(b) Prouver $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^p \equiv n \pmod{p}$

(c) En déduire que pour tout entier n

$$p \text{ ne divise par } n \quad \implies \quad n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Corrigé : Exercice 86 CCPINP 2024

Exercice 4 (Navale 2024)

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs de limite nulle. Montrer que cette suite possède une sous-suite décroissante.

Corrigé : On construit une extractrice φ par récurrence. On pose $\varphi(0) = 0$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n+1) = \text{Min} \{k > \varphi(n) \mid u_k \leq u_{\varphi(n)}\}$$

On justifie qu'une telle construction est licite. On suppose $\varphi(n)$ défini pour n entier fixé. Comme $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, on dispose de N entier tel que $0 \leq u_k \leq u_{\varphi(n)}$ pour tout $n \geq N$. Par conséquent, l'ensemble

$$\{k > \varphi(n) \mid u_k \leq u_{\varphi(n)}\}$$

est une partie non vide $\mathbb{N}$ et admet donc un plus petit élément. Par construction, on a $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n+1) > \varphi(n) \quad \text{et} \quad u_{\varphi(n+1)} \leq u_{\varphi(n)}$$

ce qui prouve que φ est une extractrice et que la suite $(u_{\varphi(n)})_n$ décroît. Ainsi

Une suite positive de limite nulle possède une sous-suite décroissante.

Remarque : Si la suite est à valeurs strictement positives, on peut extraire une sous-suite strictement décroissante en adaptant très légèrement la rédaction. On pose $\varphi(0) = 0$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n+1) = \text{Min} \{k > \varphi(n) \mid u_k < u_{\varphi(n)}\}$$

On justifie qu'une telle construction est licite. On suppose $\varphi(n)$ défini pour n entier fixé. Comme $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, c'est-à-dire avec une quantification stricte

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \quad \implies \quad |u_n| < \varepsilon$$

on dispose de N entier tel que $0 < u_k < u_{\varphi(n)}$ pour tout $n \geq N$. Par conséquent, l'ensemble

$$\{k > \varphi(n) \mid u_k < u_{\varphi(n)}\}$$

est une partie non vide $\mathbb{N}$ et admet donc un plus petit élément. Par construction, on a $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n+1) > \varphi(n) \quad \text{et} \quad u_{\varphi(n+1)} < u_{\varphi(n)}$$

Exercice 5 (Mines 2024)

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{2 + 2t}}}}}$

Corrigé : Pour $t \in [0; 1]$, on pose $u_0(t) = 2t$ puis pour n entier $u_{n+1}(t) = \sqrt{2 + u_n(t)}$ et $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{u_n(t)}$, intégrale bien définie comme intégrale de fonction continue sur un segment. On pose

$$\forall x \in [0; 2] \quad f(x) = \sqrt{2 + x}$$

L'intervalle $[0; 2]$ est stable par f . La fonction f est dérivable et on a

$$\forall x \in [0; 1] \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2 + x}}$$

Alors, par inégalité des accroissements finis, on trouve

$$\forall(n, t) \in \mathbb{N} \times [0; 1] \quad |u_{n+1}(t) - 2| = |f(u_n(t)) - f(2)| \leq \frac{1}{2} |u_n(t) - 2|$$

et par récurrence

$$\forall(n, t) \in \mathbb{N} \times [0; 1] \quad |u_n(t) - 2| \leq \frac{1}{2^n} |u_0(t) - 2| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

d'où
$$\|u_n - 2\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Par récurrence à nouveau, on vérifie $u_n(t) \geq \sqrt{2}$ pour tout n entier non nul et $t \in [0; 1]$. Pour n entier non nul, il vient

$$I_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{u_n(t)} - \frac{1}{2} \right) dt = \int_0^1 \frac{2 - u_n(t)}{2u_n(t)} dt$$

d'où
$$\left| I_n - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \|u_n - 2\|_\infty$$

On conclut
$$\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{2 + 2t}}}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}}$$

Remarque : On peut procéder par convergence dominée avec la domination

$$\forall(n, t) \in \mathbb{N} \times [0; 1] \quad \left| \frac{1}{u_n(t)} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}$$

même si le recours à ce théorème ne s'impose pas ici.

Exercice 6 (Mines 2024)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\text{Sp}(H_f(x)) \subset [1; +\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi(t) = f(tx) - \langle \nabla f(0), tx \rangle - \frac{t^2}{2} \|x\|^2$$

Montrer que la fonction ψ est convexe.

2. Montrer que la fonction f admet un minimum global.

Corrigé : 1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = f(tx)$$

Les fonctions φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Par dérivation, on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t) = \langle x, \nabla f(tx) \rangle \quad \varphi''(t) = \langle x, H_f(tx)x \rangle$$

puis
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi'(t) = \varphi'(t) - \varphi'(0) - t\|x\|^2 \quad \psi''(t) = \varphi''(t) - \|x\|^2$$

Soit t réel. Notant $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$ les valeurs propres de $H_f(tx)$ et $y_1, \dots, y_n$ les coordonnées de x dans une base orthonormée de vecteurs propres associés, on a

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) y_i^2 \geq \sum_{i=1}^n y_i^2 = \|x\|^2$$

Ainsi
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi''(t) \geq 0$$

On conclut

La fonction ψ est convexe.

2. Par position graphe/tangente, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi(t) \geq \psi'(0)t + \psi(0) = \psi(0)$$

et en particulier, on obtient

$$\psi(1) = f(x) - \langle \nabla f(0), x \rangle - \frac{1}{2} \|x\|^2 \geq f(0)$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) \geq f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle + \frac{1}{2} \|x\|^2$$

On en déduit $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) \geq f(0) - \|\nabla f(0)\| \|x\| + \frac{1}{2} \|x\|^2 \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$

On dispose de $R \geq 0$ tel que $f(x) \geq f(0)$ pour $\|x\| > R$ et la fonction continue f admet un minimum sur $B_f(0, R)$ qui est $\leq f(0)$ puisque $0 \in B_f(0, R)$. On conclut

La fonction f admet un minimum global.

Exercice 7 (Centrale 2024)

1. (a) Soit G un ensemble non vide. Rappeler les conditions sur la loi $\star$ pour que le couple $(G, \star)$ soit un groupe.
- (b) Rappeler la définition de la différentielle d'une application en un point. Faire le lien avec les dérivées partielles dans le cas $\mathcal{C}^1$.

Soit $\star$ une loi de groupe sur $\mathbb{R}$ de neutre e .

On suppose que l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \star y$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Montrer $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \partial_2 f(x \star y, e) = \partial_2 f(x, y) \partial_2 f(y, e)$

En déduire $\forall y \in \mathbb{R} \quad \partial_2 f(y, e) > 0$

3. Montrer qu'il existe un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme φ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x \star y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

Corrigé : 1.(a) Le couple $(G, \star)$ est un groupe si la loi $\star$ est une loi de composition interne, associative, ayant un élément neutre et tel que tout élément admet un symétrique.

1.(b) Soit $f : U \rightarrow F$ avec E et F des $\mathbb{R}$ -ev normés de dimension finie, U un ouvert de E et $a \in U$. La différentielle de f en a est, sous réserve d'existence, l'unique application de $\mathcal{L}(E, F)$ qu'on note $df(a)$ vérifiant

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} f(a) + df(a) \cdot h + o(h)$$

On a la caractérisation suivante : une fonction $f : U \rightarrow F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si ses dérivées partielles dans une base existent en tout point de U et sont continues sr U .

2. On a par associativité

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x \star y, z) = (x \star y) \star z = x \star (y \star z) = f(x, f(y, z))$$

D'où par dérivation composée

$$\partial_2 f(x \star y, z) = \partial_2 f(x, f(y, z)) \partial_2 f(y, z)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \partial_2 f(x \star y, e) = \partial_2 f(x, y) \partial_2 f(y, e)}$$

Soit y réel et z son inverse pour la loi $\star$, on obtient

$$\partial_2 f(e, e) = \partial_2 f(z, y) \partial_2 f(y, e)$$

Par ailleurs, on a $f(e, y) = y$ pour tout y réel d'où $\partial_2 f(e, e) = 1$. Ainsi, la fonction $y \mapsto \partial_2 f(y, e)$ est continue, ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et vaut 1 pour $y = e$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle ne change pas de signe et on conclut

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R} \quad \partial_2 f(y, e) > 0}$$

3. Un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ est une application bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et dont la réciproque est également de classe $\mathcal{C}^1$. Soit φ solution du problème. On observe $\varphi(e) = \varphi(e \star e) = 2\varphi(e)$ d'où $\varphi(e) = 0$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\varphi(f(x, y)) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

Ainsi, en fixant x réel et en dérivant en y , il vient

$$\varphi'(f(x, y)) \partial_2 f(x, y) = \varphi'(y)$$

d'où, pour $y = e$, notant $a = \varphi'(e)$, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x) \partial_2 f(x, e) = a$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \int_e^x \frac{a}{\partial_2 f(t, e)} dt$$

Réciproquement, pour $a \neq 0$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \int_e^x \frac{a}{\partial_2 f(t, e)} dt$$

D'après le théorème fondamental d'intégration, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ puisqu'elle est la primitive d'une fonction continue comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas.

Par dérivation, il vient $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x) = \frac{a}{\partial_2 f(x, e)} > 0$

ce qui prouve que l'application φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $I = \varphi(\mathbb{R})$ avec φ^{-1} également de classe $\mathcal{C}^1$. On a $I = (\varphi^{-1})^{-1}(\mathbb{R})$ ouvert comme image réciproque d'un ouvert par l'application continue φ^{-1} . Par ailleurs, on trouve pour x réel fixé

$$\frac{d}{dy} [\varphi(x \star y) - \varphi(x) - \varphi(y)] = \varphi'(x \star y) \partial_2 f(x, y) - \varphi'(y) = a \frac{\partial_2 f(x, y)}{\partial_2 f(x \star y, e)} - \frac{a}{\partial_2 f(y, e)} = 0$$

et en évaluant pour $y = e$, il vient

$$\varphi(x \star e) - \varphi(x) - \varphi(e) = 0$$

ce qui prouve

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x \star y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

L'intervalle I est donc un intervalle ouvert contenant 0 et stable par addition ce qui prouve $I = \mathbb{R}$. On conclut

$$\boxed{\text{Il existe un } \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ vérifiant la condition souhaitée.}}$$

Exercice 8 (Centrale 2024)

1. Énoncer et démontrer le théorème des bornes atteintes.

Soit C une partie convexe compacte non vide d'un espace euclidien.

2. Soit $x \in E$.

(a) Montrer qu'il existe un unique vecteur $p(x) \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - p(x)\|$.

(b) Soit $a \in C$. Montrer

$$a = p(x) \iff \forall y \in C \quad \langle x - a, y - a \rangle \leq 0$$

3. Montrer que l'application p précédemment définie est continue.

Corrigé : 1. On a le résultat suivant :

Théorème 1 (Théorème des bornes atteintes). Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continue et K un compact non vide de E . Alors la fonction f atteint son maximum et son minimum sur K , i.e.

$$\exists (a, b) \in K^2 \quad | \quad \forall x \in K \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

Démonstration. L'ensemble $f(K)$ est un compact non vide de $\mathbb{R}$. Ainsi, les bornes supérieures et inférieures de f sur K sont bien définies. Par caractérisation séquentielle, on a

$$\exists (a_n)_n \in K^{\mathbb{N}} \quad | \quad f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf f(K) \quad \text{et} \quad \exists (b_n)_n \in K^{\mathbb{N}} \quad | \quad f(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup f(K)$$

Par fermeture de $f(K)$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \in f(K) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) \in f(K)$$

d'où $\exists (a, b) \in K^2 \quad | \quad f(a) = \inf f(K) \quad \text{et} \quad f(b) = \sup f(K)$

□

2.(a) Soient x, a, b dans E . D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\left\| x - \frac{a+b}{2} \right\| = \frac{1}{2} \|x - a + x - b\| \leq \frac{1}{2} (\|x - a\| + \|x - b\|) = \|x - a\|$$

Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si $(x - a, x - b)$ est positivement liée, c'est-à-dire $x - b = \lambda(x - a)$ avec $\lambda \geq 0$ ($x - a$ non nul sinon $x = a$ et $\|a - b\| = 0$ absurde). L'égalité en norme impose $\lambda = 1$ d'où $a = b$ ce qui est faux. Ainsi

$$\left\| x - \frac{a+b}{2} \right\| < \|x - a\|$$

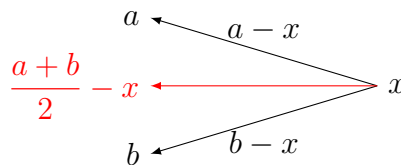


FIGURE 1 – Médiane

Variante : D'après l'identité du parallélogramme, on a

$$\begin{aligned} 2\|x - a\|^2 + 2\|x - b\|^2 &= \|x - a + x - b\|^2 + \|x - a - (x - b)\|^2 \\ &= 4\left\| x - \frac{a+b}{2} \right\|^2 + \|a - b\|^2 \end{aligned}$$

d'où
$$\|x - \frac{a+b}{2}\|^2 = \|x - a\|^2 - \frac{1}{4}\|a - b\|^2 < \|x - a\|^2$$

et le résultat suit. L'argument est plus élémentaire (mais moins naturel ?) que le recours à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit $x \in E$. L'application $y \in C \mapsto \|x - y\|$ est continue car lipschitzienne et atteint donc un minimum sur le compact C . Ainsi, il existe $a \in C$ tel que

$$\|x - a\| = d(x, C)$$

Si b est un point de C distinct de a et qui réalise aussi la distance, alors

$$\|x - \frac{a+b}{2}\| < \|x - a\| = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{a+b}{2} \in C$$

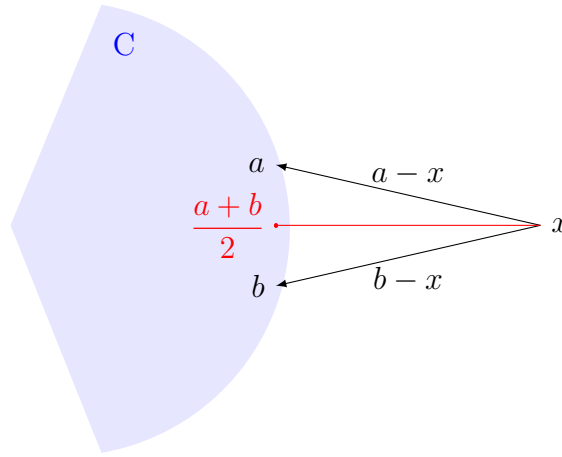


FIGURE 2 – Convexe et médiane

par convexité de C . Ceci est absurde. Ainsi

Pour $x \in E$, il existe un unique vecteur $a \in C$ tel que $\|x - a\| = d(x, C)$

2.(b) Soit $x \in E$. On suppose $\forall y \in C \quad \langle x - a, y - a \rangle \leq 0$

Pour $y \in C$, on a

$$\|x - y\|^2 = \|x - a + a - y\|^2 = \|x - a\|^2 + 2 \underbrace{\langle x - a, a - y \rangle}_{\geq 0} + \|a - y\|^2 \geq \|x - a\|^2$$

La distance de x à C est donc réalisée en a autrement dit

Pour $x \in E$ et $a \in C$ tel que $\langle x - a, y - a \rangle \leq 0$ pour tout $y \in C$, alors $a = p(x)$.

On suppose $a = p(x)$. Soit $y \in C$. On pose $z = ty + (1 - t)a$ avec $t \in]0; 1]$. On a $z \in C$ par convexité. Puis

$$\|x - z\|^2 = \|x - a + t(a - y)\|^2 = \|x - a\|^2 + 2t \langle x - a, a - y \rangle + t^2 \|a - y\|^2$$

d'où
$$2 \langle x - a, a - y \rangle + t \|a - y\|^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2 \langle x - a, a - y \rangle \geq 0$$

Ainsi

$\forall (x, y) \in E \times C \quad \langle x - p(x), y - p(x) \rangle \leq 0$

3. On a

$$\begin{aligned}\langle x - y, p(x) - p(y) \rangle &= \langle x - p(x) + p(x) - p(y) + p(y) - y, p(x) - p(y) \rangle \\ &= \langle x - p(x), p(x) - p(y) \rangle + \|p(x) - p(y)\|^2 + \langle p(y) - y, p(x) - p(y) \rangle\end{aligned}$$

D'après le résultat de la question précédente, on a

$$\langle x - p(x), p(x) - p(y) \rangle = -\langle x - p(x), p(y) - p(x) \rangle \geq 0$$

et

$$\langle p(y) - y, p(x) - p(y) \rangle = -\langle y - p(y), p(x) - p(y) \rangle \geq 0$$

D'où

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x - y, p(x) - p(y) \rangle \geq \|p(x) - p(y)\|^2}$$

Soit $(x, y) \in E^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\langle x - y, p(x) - p(y) \rangle \leq \|x - y\| \|p(x) - p(y)\|$$

On en déduit

$$\|p(x) - p(y)\| \leq \|x - y\|$$

l'inégalité étant réalisée si $p(x) - p(y) = 0_E$. Ainsi

$$\boxed{\text{L'application } p \text{ est continue.}}$$

Exercice 9 (Polytechnique 2024)

Soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs unitaires d'un espace euclidien E . Montrer qu'il existe un n -uplet $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que

$$\left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k v_k \right\| \leq \sqrt{n}$$

Corrigé : On suppose $\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \quad \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k v_k \right\| > \sqrt{n}$

On considère $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher.

On a

$$\left\| \sum_{k=1}^n X_k v_k \right\|^2 > n$$

et par linéarité de l'espérance

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left(\left\| \sum_{k=1}^n X_k v_k \right\|^2 \right) &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n X_k^2 \|v_k\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j \langle v_i, v_j \rangle \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \|v_k\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle v_i, v_j \rangle \mathbb{E}(X_i X_j)\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E} \left(\left\| \sum_{k=1}^n X_k v_k \right\|^2 \right) = n \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left(\left\| \sum_{k=1}^n X_k v_k \right\|^2 \right) > n$$

ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\exists (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \quad \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k v_k \right\| \leq \sqrt{n}}$$