Préparation à l'oral python - Feuille n°3

Exercice 1 (Centrale 2021)

Pour $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on note $a \mod b$ et $a \operatorname{div} b$ le reste et le quotient de la division euclidienne de a par b. Soit A un entier $\geqslant 3$. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \left(\mathrm{A}^{n^2+n} \mod (\mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1)\right) \mod \mathrm{A}^n$$

On définit la *suite de Fibonacci* notée $(\mathrm{F}_n)_n$ par $\mathrm{F}_0 = 0$, $\mathrm{F}_1 = 1$ et $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$ pour tout n entier.

1. Avec l'outil informatique, afficher les 20 premières valeurs des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{F}_n)_{n\geqslant 1}$. Que peut-on conjecturer ?
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie en vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1 \in \mathbb{N}^*$$
3. Calculer u_1.
4. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \mathrm{F}_n x^n$. On note S sa somme.
5. Calculer $\mathrm{S}(x)$ pour $x \in\,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$.
6. Montrer $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \left(\mathrm{A}^{n^2+n} \operatorname{div} (\mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1)\right) \mod \mathrm{A}^n$
7. Établir $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{F}_{n+2} \leqslant \mathrm{A}^n$
8. Prouver la conjecture faite à la première question.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def F(n):
    if n<=1:
        return n
    else:
        a,b=0,1
        for k in range(2,n+1):
            a,b=b,a+b
        return b

A=3
def u(n):
    return ((A**(n**2+n))%(A**(2*n)-A**n-1))%(A**n)

print([F(k) for k in range(1,21)])
print([u(k) for k in range(1,21)])
```

On observe :

```
[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ...]
[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ...]
```

On conjecture $$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad u_n = \mathrm{F}_n}$$

2. Pour $\mathrm{A}\geqslant 3$, on a $\mathrm{A}^n\geqslant 3$ pour n entier non nul puis

$$\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^n-1=\mathrm{A}^n(\mathrm{A}^n-1)-1\geqslant 3\times 2-1\leqslant 1$$

et il s'agit clairement d'un entier. On conclut

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est bien définie.}}$$

3. On a $$\mathrm{A}^2=1\times(\mathrm{A}^2-\mathrm{A}-1)+\mathrm{A}+1$$

Avec l'équivalence $$\mathrm{A}+1<\mathrm{A}^2-\mathrm{A}-1 \iff 3<(\mathrm{A}-1)^2$$

on constate qu'on a bien écrit la division euclidienne de A^2 par $\mathrm{A}^2-\mathrm{A}-1$ et on conclut

$$\boxed{u_1=(\mathrm{A}+1)\mod \mathrm{A}=1}$$

4. La suite $(\mathrm{F}_n)_n$ est récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2-r-1=0$ dont les racines sont φ et $-\dfrac{1}{\varphi}$ avec $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Avec les conditions initiales, on trouve

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \mathrm{F}_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n-\frac{(-1)^n}{\varphi^n}\right)$$

En observant $\varphi>1$, il vient $\mathrm{F}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n$ et d'après la règle de d'Alembert, on conclut

$$\boxed{\mathrm{R}=\frac{1}{\varphi}}$$

5. Soit $x\in\,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$. Il vient avec la linéarité du symbole somme, la convergence étant réalisée

$$\mathrm{S}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{F}_n x^n=x+\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{F}_{n+2}x^{n+2}x+\sum_{n=0}^{+\infty}(\mathrm{F}_n+\mathrm{F}_{n+1})x^{n+2}=x+x^2\mathrm{S}(x)+x\mathrm{S}(x)$$

Ainsi $$\boxed{\forall x\in\,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[\qquad \mathrm{S}(x)=\frac{x}{1-x-x^2}}$$

6. Soit n entier non nul. On note

$$q_n=\mathrm{A}^{n^2+n}\operatorname{div}(\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^n-1) \quad \text{et} \quad r_n=\mathrm{A}^{n^2+n}\mod(\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^n-1)$$

On a $$\mathrm{A}^{n^2+n}=q_n(\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^n-1)+r_n$$

et $$\mathrm{A}^{n^2+n}\equiv 0\ [\mathrm{A}^n] \quad \text{et} \quad \mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^n-1\equiv -1\ [\mathrm{A}^n]$$

d'où $$-q_n+r_n\equiv 0\ [\mathrm{A}^n]$$

On conclut $$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad u_n=\left(\mathrm{A}^{n^2+n}\operatorname{div}(\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^n-1)\right)\mod \mathrm{A}^n}$$

7. On montre par récurrence $\mathrm{F}_{n+2}\leqslant \mathrm{A}^n$ pour tout n entier. L'inégalité est vraie pour $n=0$ et $n=1$ puisque $\mathrm{F}_2=1$ et $\mathrm{F}_3=2$. On la suppose vraie jusqu'au rang $n+1$ avec n entier. Il vient

$$\mathrm{F}_{n+2}=\mathrm{F}_{n+1}+\mathrm{F}_n\leqslant \mathrm{A}^{n-1}+\mathrm{A}^{n-2}=\mathrm{A}^{n-1}\underbrace{(\mathrm{A}+1)}_{\leqslant \mathrm{A}^2}\leqslant \mathrm{A}^n$$

ce qui clôt la récurrence. On conclut

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \qquad \mathrm{F}_{n+2}\leqslant \mathrm{A}^n}$$

8. On vérifie directement le cas $n=1$. On suppose ensuite $n \geqslant 2$. On a

$$\mathrm{S}(\mathrm{A}^{-n}) = \frac{\mathrm{A}^{-n}}{1-\mathrm{A}^{-n}-\mathrm{A}^{-2n}} = \frac{\mathrm{A}^{n}}{\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^{n}-1}$$

d'où
$$(\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^{n}-1)\mathrm{S}(\mathrm{A}^{-n}) = \mathrm{A}^{n}$$

puis
$$(\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^{n}-1)\mathrm{A}^{n^2}\mathrm{S}(\mathrm{A}^{-n}) = \mathrm{A}^{n^2+n}$$

avec
$$\mathrm{A}^{n^2}\mathrm{S}(\mathrm{A}^{-n}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn} = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn} + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn}$$

On a
$$\alpha_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathrm{A}^{k-2}\mathrm{A}^{n^2-kn}$$

et après le changement d'indice $\ell = k-(n+1)$, on trouve

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathrm{A}^{k-2+n^2-kn} = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\mathrm{A}^{\ell(1-n)-1} = \frac{\mathrm{A}^{n}}{\mathrm{A}^{n+1}-\mathrm{A}^{2}}$$

On vérifie par récurrence $\mathrm{A}^n < \mathrm{A}^{n+1}-\mathrm{A}^2$ pour $n \geqslant 2$. On a donc établi

$$(\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^{n}-1)\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn}+\alpha_n\right) = \mathrm{A}^{n^2+n}$$

avec
$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn} \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \alpha_n \in [\,0\,;1\,[$$

Ainsi
$$\left\lfloor \frac{\mathrm{A}^{n^2+n}}{\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^{n}-1} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn}$$

Puis
$$\left(\mathrm{A}^{n^2+n}\ \mathrm{div}\ (\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^{n}-1)\right) \mod \mathrm{A}^n = \mathrm{F}_n$$

On conclut
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \mathrm{F}_n}$$

Exercice 2 (Centrale 2017)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables indépendantes de loi uniforme sur $[\![\,1\,;\,r\,]\!]$ avec r entier non nul. On définit

$$\forall k \in [\![\,1\,;\,r\,]\!] \qquad \mathrm{T}_k = \inf\{n \geqslant 1 \mid \mathrm{Card}\,\{\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n\} = k\}$$

Les variables X_k modélisent les résultats successifs d'un lancer de dé à r faces, les variables T_k désignent le nombre de lancers minimal pour observer k faces distinctes du dé. On pose

$$\forall k \in [\![\,1\,;\,r\,]\!] \qquad \mathrm{Y}_k = \mathrm{T}_k - \mathrm{T}_{k-1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{T}_0 = 0$$

1. Écrire une fonction `T(r)` qui renvoie une réalisation de $\mathrm{T}_r(\omega)$ avec $\omega \in \Omega$.
2. Représenter une estimation de $\mathbb{E}(\mathrm{T}_r)$ pour $r \in [\![\,10\,;\,100\,]\!]$.
3. Déterminer la loi de Y_k pour $k \in [\![\,1\,;\,r\,]\!]$ puis étudier l'indépendance des Y_k.
4. Montrer que

$$\mathbb{E}(\mathrm{T}_r) = r \times \mathrm{H}_r \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\mathrm{T}_r) = -r\mathrm{H}_r + r^2\left(\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{H}_r = \sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k}$$

5. Déterminer un équivalent simple de H_r pour $r \to +\infty$.

6. En déduire $\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{\mathrm{T}_r}{r\ln(r)} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$

Corrigé : 1. On saisit :

```
def T(r):
    djvu=[False]*r
    nb=0
    cpt=0
    while nb<r:
        X=rd.randint(r)
        if not djvu[X]:
            djvu[X]=True
            nb+=1
        cpt+=1
    return cpt
```

2. On saisit :

```
N=1000
tr=range(10,101)
tT=[sum([T(r) for k in range(N)])/N for r in tr]
plt.plot(tr,tT,'bo--')
gamma=.577
plt.plot(tr,[r*(np.log(r)+gamma) for r in tr],'r',linewidth=2)
plt.grid();plt.show()
```

On observe :

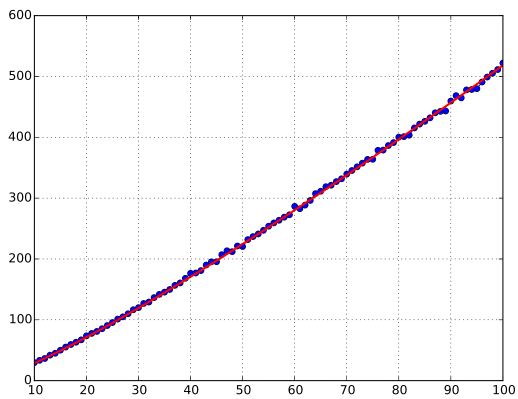

FIGURE 1 – Tracé de la suite $(\mathbb{E}(\mathrm{T}_r))_r$

En superposant au graphe de $r \mapsto r(\ln(r) + \gamma)$, on obtient une vérification tout à fait probante.

3. Pour obtenir une nouvelle face après en avoir observé $i-1$, il faut répéter des lancers jusqu'à obtenir une nouvelle face. Il s'agit donc d'une loi géométrique (répétition d'une expérience à deux issues jusqu'à réalisation d'un succès) de paramètre la probabilité d'avoir une nouvelle face qui est $\dfrac{r-(i-1)}{r}$ (proportion des faces non encore observées). Les variables Y_i sont indépendantes puisque les nombres de lancers pour obtenir une nouvelle face sont indépendants. On a donc

$$\boxed{\forall i \in [\![1\,;\,r]\!] \qquad \mathrm{Y}_i \sim \mathscr{G}\left(\frac{r-i+1}{r}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{Y}_1,\ldots,\mathrm{Y}_r \text{ indépendantes}}$$

4. Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}(\mathrm{T}) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Y}_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \frac{r}{r-i+1}$$

Les variables Y_i étant indépendantes, il vient

$$\mathbb{V}(\mathrm{T}) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Y}_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \frac{i-1}{r} \times \frac{r^2}{(r-i+1)^2} = r\sum_{i=1}^{r}\left[-\frac{1}{r-i+1} + \frac{r}{(r-i+1)^2}\right]$$

Avec le changement d'indice $k = r - i + 1$, on obtient

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{T}) = r \times \mathrm{H}_r \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\mathrm{T}) = -r\mathrm{H}_r + r^2\left(\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2}\right)}$$

5. Par comparaison série/intégrale ou en considérant la série téléscopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ avec $u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n)$, on obtient

$$\boxed{\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

6. Soit $\varepsilon > 0$. On a l'inclusion

$$\left\{\left|\frac{\mathrm{T}}{r\ln(r)} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right\} \subset \left\{\left|\frac{\mathrm{T}}{r\ln(r)} - \frac{\mathrm{H}_r}{\ln(r)}\right| \geqslant \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\left|\frac{\mathrm{H}_r}{\ln(r)} - 1\right| \geqslant \tfrac{\varepsilon}{2}\right\}$$

et $\left\{\left|\dfrac{\mathrm{H}_r}{\ln(r)} - 1\right| \geqslant \tfrac{\varepsilon}{2}\right\} = \varnothing$ pour r assez grand. Par suite, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{T}}{r\ln(r)} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{T}}{r\ln(r)} - \frac{\mathrm{H}_r}{\ln(r)}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathrm{o}(1)\\ &\leqslant \frac{4}{\varepsilon^2}\mathbb{V}\left(\frac{\mathrm{T}}{r\ln(r)}\right) + \mathrm{o}(1)\end{aligned}$$

et
$$\mathbb{V}\left(\frac{\mathrm{T}}{r\ln(r)}\right) = \frac{\mathrm{O}(r^2)}{r^2\ln^2 r} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\ln^2 r}\right) = \mathrm{o}(1)$$

On conclut
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{T}}{r\ln(r)} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0}$$

Exercice 3 (Centrale 2022)

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \int_{-1}^{1} (1+t)^n \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

1. Représenter les termes de la suite $(\sqrt{n}\mathrm{I}_n)_{n\in[\![100\,;\,500]\!]}$. Qu'observe-t-on ?
   On pose

   $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = (1+t)\mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad \forall t \in \left]-1\,;0\right[\cup \left]0\,;+\infty\right[\qquad \varphi(t) = -\frac{1}{t^2}\ln f(t)$$

2. Montrer que la fonction φ se prolonge par continuité en zéro. Que peut-on dire de $\varphi(t)$ lorsque $t \to -1$?

3. À l'aide de l'outil informatique, établir l'existence de $a > 0$ tel que
$$\forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad \varphi(t) \geqslant a$$

On pose
$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad f_n(t) = f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$$

4. Établir
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

5. En déduire
$$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{J}_n = \int_1^{+\infty} (1+t)^n \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

6. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad n! = \mathrm{e}^{-n} n^{n+1}(\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n)$$

7. Établir
$$\mathrm{J}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{I}_n)$$

Retrouver la formule de Stirling.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def I(n):
    return integr.quad(lambda t:np.exp(-n*t)*(1+t)**n,-1,1)[0]

tn=range(100,501)
trI=[np.sqrt(n)*I(n) for n in tn]
plt.plot(tn,trI)
plt.show()
```

On observe :

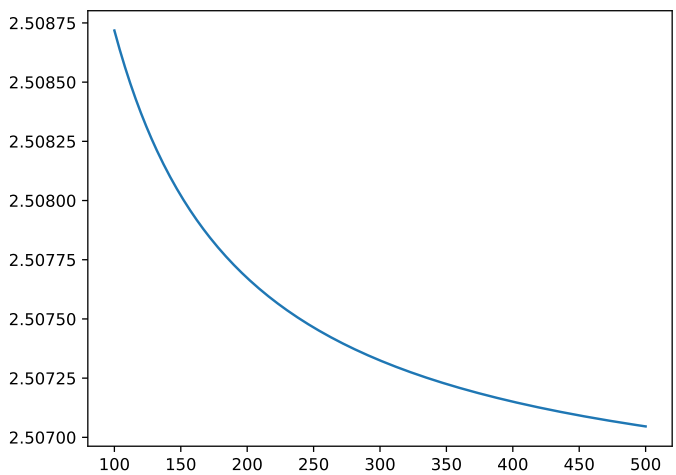

Figure 2 – Tracé de la suite $(\sqrt{n}\mathrm{I}_n)_n$

On peut conjecturer $\boxed{\text{La suite } (\sqrt{n}\mathrm{I}_n)_n \text{ converge.}}$

2. Soit $t > -1$ avec $t \neq 0$. On a

$$\varphi(t) = -\frac{1}{t^2}\left(\ln(1+t) - t\right) \underset{t\to 0}{=} -\frac{1}{t^2}\left(t - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2) - t\right) \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2}$$

et

$$\varphi(t) \underset{t\to -1}{\sim} -\ln(1+t)$$

Ainsi $\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ se prolonge par continuité en zéro et } \varphi(t) \xrightarrow[t\to -1]{} +\infty.}$

Dans toute la suite, on confond φ avec son prolongement par continuité en zéro.

3. On saisit :

```
def phi(t):
    if t!=0:
        return -(np.log(1+t)-t)/t**2
    else:
        return .5

tt=np.linspace(-1,1,100)
tphi=[phi(t) for t in tt]
plt.plot(tt,tphi)
plt.show()
```

On observe :

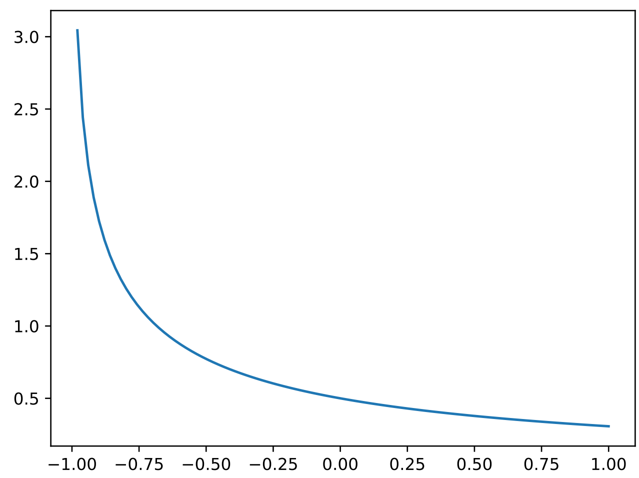

FIGURE 3 – Graphe de $y = \varphi(x)$

On conjecture que $\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ décroît sur }]-1\,;1\,[.}$

Par dérivation, il vient pour $t > -1$ et $t \neq 0$

$$\varphi'(t) = \frac{\mathrm{N}(t)}{(1+t)t^3} \quad \text{avec} \quad \mathrm{N}(t) = 2(1+t)\ln(1+t) - 2t - t^2$$

puis $$\mathrm{N}'(t) = 2(\ln(1+t) - t)$$

On a $\mathrm{N}'(t) \leqslant 0$ par concavité de ln et $\mathrm{N}(0) = 0$. La fonction N prend des valeurs positives sur $]-1\,;0\,[$ et négatives sur $]\,0\,;1\,[$. Par conséquent, la fonction φ' est négative sur $]-1\,;1\,[\smallsetminus\{0\}$ et on en déduit la décroissance de φ sur $]-1\,;1\,[$ et comme $\varphi(t) \xrightarrow[t\to 1]{} 1 - \ln 2 > 0$, on conclut

$$\boxed{\forall t \in\,]-1\,;1\,[\qquad \varphi(t) \geqslant a \quad \text{avec} \quad a = 1 - \ln 2 > 0}$$

4. Soit $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times\,]-1\,;1\,[$. On a $1 + \dfrac{t}{\sqrt{n}} > 0$ pour n assez grand et

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}t\right) \\ &= \exp\left(n\left(\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \sqrt{n}t\right) \\ f_n(t) &= \exp\left(-\frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(1)\right) \end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}$$

5. Soit n entier non nul. Avec le changement de variables $t = \dfrac{u}{\sqrt{n}}$, on obtient

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-u\sqrt{n}}\,\mathrm{d}u$$

On pose $$\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad g_n(u) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-u\sqrt{n}} & \text{si } |u| < \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sqrt{n}\mathrm{I}_n = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\,\mathrm{d}u$$

Soit n entier non nul et $u \in\,]-\sqrt{n}\,;\sqrt{n}\,[$. On a

$$g_n(u) = \exp\left(-u^2 \varphi\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right) \leqslant \exp\left(-au^2\right)$$

et la majoration vaut aussi pour $|u| \geqslant \sqrt{n}$. La fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-au^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on conclut par convergence dominée

$$\sqrt{n}\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$$

6. Soit n entier non nul. Par relation de Chasles puis changement de variables, il vient

$$\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n = \int_{-1}^{+\infty} (1+t)^n \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} u^n \mathrm{e}^{-nu+n}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^n \int_0^{+\infty} u^n \mathrm{e}^{-nu}\,\mathrm{d}u$$

Avec le changement de variables $v = nu$ et des intégrations parties, on obtient

$$\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n = \frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}} \int_0^{+\infty} v^n \mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}} n!$$

Ainsi $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad n! = \mathrm{e}^{-n} n^{n+1}(\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n)}$$

7. Soit n entier non nul. Avec le changement de variables $t = \dfrac{u}{\sqrt{n}}$, on obtient

$$\mathrm{J}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-u\sqrt{n}}\, \mathrm{d}u$$

On pose $$\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad h_n(u) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-u\sqrt{n}} & \text{si } u \geqslant \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sans difficulté, on trouve $$\forall u \geqslant 0 \qquad h_n(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Soit $u \geqslant 0$. On pose $$\forall x > 0 \qquad \psi(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{u}{x}\right) - ux$$

La fonction ψ est dérivable et il vient

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \qquad \psi'(x) &= 2x \ln\left(1 + \frac{u}{x}\right) - \frac{t}{1 + u/x} - u \\ &= \frac{2x}{1 + u/x} \left[\left(1 + \frac{u}{x}\right) \ln\left(1 + \frac{u}{x}\right) - \frac{u}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{x}\right)^2\right] \end{aligned}$$

On pose enfin $$\forall s \geqslant 0 \qquad \chi(s) = (1+s)\ln(1+s) - s - \frac{s^2}{2}$$

La fonction χ est dérivable et on trouve par concavité du ln

$$\forall s \geqslant 0 \qquad \chi'(s) = \ln(1+s) + 1 - 1 - s \leqslant 0$$

Avec $\chi(0) = 0$, il s'ensuit que $\chi(s) \leqslant 0$ pour $s \geqslant 0$ d'où

$$\forall x > 0 \qquad \psi'(x) = \frac{2x}{1 + u/x} \chi\left(\frac{u}{x}\right) \leqslant 0$$

Par conséquent $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \psi(\sqrt{n}) \leqslant \psi(1)$$

c'est-à-dire $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad n \ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) - u\sqrt{n} \leqslant \ln(1+u) - u$$

et passant à l'exponentielle qui est croissante, on obtient

$$\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad h_n(u) \leqslant (1+u)\mathrm{e}^{-u}$$

Cette dominante est intégrable et par convergence dominée, il vient

$$\sqrt{n}\mathrm{J}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

D'où $$\boxed{\mathrm{J}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{I}_n)}$$

Il s'ensuit $$n! = \mathrm{e}^{-n} n^{n+1} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

Et on conclut $$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$$