ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Préparation à l'oral python - Feuille n°3

Exercice 1 (Centrale 2021)

Pour $(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, on note $a \mod b$ et $a \operatorname{div} b$ le reste et le quotient de la division euclidienne de a par b. Soit A un entier $\geqslant 3$. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \left(\mathrm{A}^{n^2+n} \mod (\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^n-1)\right) \mod \mathrm{A}^n$$

On définit la *suite de Fibonacci* notée $(\mathrm{F}_n)_n$ par $\mathrm{F}_0 = 0$, $\mathrm{F}_1 = 1$ et $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$ pour tout n entier.

1. Avec l'outil informatique, afficher les 20 premières valeurs des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{F}_n)_{n\geqslant 1}$. Que peut-on conjecturer ?
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie en vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^n-1 \in \mathbb{N}^*$$
3. Calculer u_1.
4. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \mathrm{F}_n x^n$. On note S sa somme.
5. Calculer $\mathrm{S}(x)$ pour $x \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$.
6. Montrer $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \left(\mathrm{A}^{n^2+n} \operatorname{div} (\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^n-1)\right) \mod \mathrm{A}^n$
7. Établir $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{F}_{n+2} \leqslant \mathrm{A}^n$
8. Prouver la conjecture faite à la première question.

Exercice 2 (Centrale 2017)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables indépendantes de loi uniforme sur $[\![1\,;\, r]\!]$ avec r entier non nul. On définit

$$\forall k \in [\![1\,;\, r]\!] \qquad \mathrm{T}_k = \inf\{n \geqslant 1 \mid \operatorname{Card}\{\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n\} = k\}$$

Les variables X_k modélisent les résultats successifs d'un lancer de dé à r faces, les variables T_k désignent le nombre de lancers minimal pour observer k faces distinctes du dé. On pose

$$\forall k \in [\![1\,;\, r]\!] \qquad \mathrm{Y}_k = \mathrm{T}_k - \mathrm{T}_{k-1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{T}_0 = 0$$

1. Écrire une fonction `T(r)` qui renvoie une réalisation de $\mathrm{T}_r(\omega)$ avec $\omega \in \Omega$.
2. Représenter une estimation de $\mathbb{E}(\mathrm{T}_r)$ pour $r \in [\![10\,;\, 100]\!]$.
3. Déterminer la loi de Y_k pour $k \in [\![1\,;\, r]\!]$ puis étudier l'indépendance des Y_k.
4. Montrer que
$$\mathbb{E}(\mathrm{T}_r) = r \times \mathrm{H}_r \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\mathrm{T}_r) = -r\mathrm{H}_r + r^2\left(\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{H}_r = \sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k}$$
5. Déterminer un équivalent simple de H_r pour $r \to +\infty$.
6. En déduire $\qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{\mathrm{T}_r}{r\ln(r)} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$

Exercice 3 (Centrale 2022)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \int_{-1}^{1} (1+t)^n \mathrm{e}^{-nt} \,\mathrm{d}t$$

1. Représenter les termes de la suite $(\sqrt{n}\mathrm{I}_n)_{n \in [\![100\,;500]\!]}$. Qu'observe-t-on ?
   On pose
   $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = (1+t)\mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad \forall t \in \,]-1\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;+\infty\,[\qquad \varphi(t) = -\frac{1}{t^2}\ln f(t)$$
2. Montrer que la fonction φ se prolonge par continuité en zéro. Que peut-on dire de $\varphi(t)$ lorsque $t \to -1$?
3. À l'aide de l'outil informatique, établir l'existence de $a > 0$ tel que
   $$\forall t \in \,]-1\,;1\,[\qquad \varphi(t) \geqslant a$$
   On pose $$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad f_n(t) = f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$$
4. Établir $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$
5. En déduire $$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$
   On pose $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{J}_n = \int_{1}^{+\infty} (1+t)^n \mathrm{e}^{-nt} \,\mathrm{d}t$$
6. Montrer $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad n! = \mathrm{e}^{-n} n^{n+1} (\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n)$$
7. Établir $$\mathrm{J}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{I}_n)$$
   Retrouver la formule de Stirling.