ISM MP, Mathématiques
Année 2024/2025

Préparation à l'oral - Feuille n°6

Exercice 1 (CCINP 2024)

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En déduire que l'ensemble des matrices commutant avec A est $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2, \mathrm{A})$.

Corrigé : Exercice 73 CCPINP 2024

Exercice 2 (CCINP 2024)

Soit n entier avec $n \geqslant 2$. On pose $z = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$

1. On suppose $k \in [\![1\,; n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument de $z^k - 1$.
2. On pose $\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{n-1} \left| z^k - 1 \right|$. Montrer que $\mathrm{S} = \dfrac{2}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$.

Corrigé : Exercice 89 CCPINP 2024

Exercice 3 (CCINP 2024)

On admet que pour $x \in \,]-1\,;1\,[$ et q entier la série $\sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge avec

$$\forall x \in \,]-1\,;1\,[\qquad \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$$

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $p \in \,]\,0\,;1\,[$ et X, Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathbb{P}\left(\mathrm{X} = k, \mathrm{Y} = n\right) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Prouver que $1 + \mathrm{Y}$ suit une loi géométrique.
   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.

Corrigé : Exercice 111 CCPINP 2024

Exercice 4 (Navale 2024)

Soit $x > 0$. Montrer $$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(xt)\,\mathrm{d}t > 0$$

Corrigé : Soit $x > 0$. On pose $\quad \forall t > 0 \qquad f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(xt)$

On a $f \in \mathscr{C}^0(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ avec $f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparées d'où $f \in \mathrm{L}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$. Avec le changement de variables $u = xt$, on obtient
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(xt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u/x} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$
On a notamment
$$\sum_{k=0}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-u/x} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \int_0^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-u/x} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u/x} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$
Or, on trouve avec le changement de variables $v = u - k\pi$
$$\sum \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-u/x} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sum (-1)^k u_k(x) \quad \text{avec} \quad u_k(x) = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(k\pi+v)/x} \frac{\sin(v)}{\sqrt{v + k\pi}}\,\mathrm{d}v$$
Sans difficulté, la suite $(u_k(x))_k$ décroît et
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant u_k(x) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{k\pi}} \underset{k\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$$
Ainsi, la série $\sum (-1)^k u_k(x)$ vérifie le critère des séries alternées. Par conséquent, sa somme est comprise entre deux sommes partielles comprises d'où
$$u_0(x) - u_1(x) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k(x) \leqslant u_1(x)$$
et par linéarité de l'intégrale
$$u_0(x) - u_1(x) = \int_0^{\pi} \left[\frac{\mathrm{e}^{-v/x}}{\sqrt{v}} - \frac{\mathrm{e}^{-(\pi+v)/x}}{\sqrt{v+\pi}} \right] \sin(v)\,\mathrm{d}v$$
L'intégrande est une fonction continue, strictement positive sur $]\,0\,;\pi\,[$ d'où par séparation
$$u_0(x) - u_1(x) > 0$$
On conclut $$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(xt)\,\mathrm{d}t > 0}$$

Exercice 5 (Mines 2024)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et m entier non nul. On considère le système différentiel (S) : $\mathrm{X}^{(m)} = \mathrm{AX}$ d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathscr{C}^m(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si toutes les solutions de (S) sont polynomiales.

Corrigé : On suppose A nilpotente. Soit X une solution de (S). Par récurrence, on a $\mathrm{X}^{(km)} = \mathrm{A}^k\mathrm{X}$ pour k entier d'où $\mathrm{X}^{(nm)} = \mathrm{A}^n\mathrm{X} = 0$ et par conséquent X est polynomiale. Réciproquement, on suppose que toute solution de (S) est polynomiale. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{V} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle telle que $\mathrm{AV} = \lambda\mathrm{V}$. On choisit $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\mu^n = \lambda$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \mathrm{e}^{\mu t}\mathrm{V}$$

Il vient $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi^{(m)}(t) = \mu^m \mathrm{e}^{\mu t}\mathrm{V} = \lambda \mathrm{e}^{\mu t}\mathrm{V} = \mathrm{e}^{\mu t}\mathrm{AV} = \mathrm{A}\varphi(t)$$

Les parties réelles et complexes de φ sont solutions réelles de (S) donc polynomiales d'où φ également. Considérant une coordonnée non nulle de V, il s'ensuit que $t \mapsto \mathrm{e}^{\mu t}$ est polynomiale d'où $\mu = 0$ et donc $\lambda = 0$. On conclut

$$\boxed{\text{La matrice A est nilpotente si et seulement si toutes les solutions de (S) sont polynomiales.}}$$

Variantes : On propose des alternatives pour la réciproque. On peut montrer qu'il existe une formulation d'ordre 1 associé au système (S). On note

$$\mathrm{Z}^\top = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n & x_1' & \ldots & x_n' & \ldots & x_1^{(m-1)} & \ldots & x_n^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

On observe $\mathrm{Z}' = \mathrm{BZ}$ avec

$$\mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & \mathrm{I}_n & 0 & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \ldots & \ldots & 0 & \mathrm{I}_n \\ \hline \mathrm{A} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{array}\right)$$

On vérifie sans difficulté $$\mathrm{X}^{(m)} = \mathrm{AX} \iff \mathrm{Z}' = \mathrm{BZ}$$

Ainsi, on peut considérer un problème de Cauchy pour Z qui fournit une solution à (S) avec $\mathrm{X}(0)$ déterminé.

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$. Quitte à changer de base en posant $\mathrm{X} = \mathrm{PY}$ avec $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ matrice de passage vers une base de trigonalisation, on peut trouver y combinaison linéaire des coordonnées de X solution de (S) telle que $y^{(m)} = \lambda y$ avec y non nulle (prendre la dernière coordonnée sur la fin du bloc triangulaire $\lambda \mathrm{I}_{m_\lambda} + \mathrm{T}_\lambda$). On dispose de $k \geqslant 2$ entier qu'on peut choisir minimal tel que $y^{(k)} = 0$ (y est combinaison linéaire des coordonnées de X donc polynomiale et $k \geqslant 2$ car y choisie non nulle). Si $k < m$, alors $y^{(m)} = \lambda y = 0$. Sinon, par division euclidienne, on dispose de q entier et $r \in [\![0\,; m-1]\!]$ tel que $k = mq + r$. Il vient

$$y^{(k)} = \left(y^{(mq)}\right)^{(r)} = \lambda^q y^{(r)} = 0$$

avec $r < k$. Si $\lambda \neq 0$, on trouve soit $y = 0$, soit $y^{(r)} = 0$ ce qui contredit la minimalité de k. On en déduit $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) = \{0\}$ d'où $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^n$ et d'après le théorème de Cayley-Hamilton, il vient $\chi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^n = 0$.

2. On reprend la formulation $\mathrm{Z}' = \mathrm{BZ}$. D'après le théorème de Cauchy linéaire, on en déduit que l'ensemble solutions de $\mathrm{Z}' = \mathrm{BZ}$ est un sev de dimension nm de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{nm})$ et en spécialisant ce résultat aux n premières cordonnées, on obtient que l'ensemble des solutions de (S) est un sev de dimension nm de $\mathscr{C}^m(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Par conséquent, l'ensemble $\left\{\deg x_i,\ i \in [\![1\,; n]\!],\ \mathrm{X}^{(m)} = \mathrm{AX}\right\}$ admet un maximum. On dispose d'un entier p tel que mp est supérieur ou égal à ce maximum et pour X solution de (S), on a ainsi $\mathrm{X}^{(mp)} = \mathrm{A}^p\mathrm{X} = 0$. On peut choisir arbitrairement la condition initiale $\mathrm{X}(0)$ et il s'ensuit $\mathrm{A}^p = 0$.

Exercice 6 (Mines 2024)

Soient des réels $0 < a_0 < \ldots < a_n$ et des polynômes $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ et $\mathrm{Q} = (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}$.

1. Soit $p \geqslant 2$ entier et $z_1, \ldots, z_p$ des complexes non nuls tels que $\left|\sum\limits_{i=1}^{p} z_i\right| = \sum\limits_{i=1}^{p} |z_i|$. Montrer que pour tout $k \in [\![1\,;\, p]\!]$, il existe $\lambda_k > 0$ tel que $z_k = \lambda_k z_1$.
2. Établir $\qquad \forall z \in \mathbb{C} \qquad |\mathrm{Q}(z)| \geqslant \mathrm{Q}(|z|)$
3. Montrer que les racines de P sont de module < 1.

Corrigé : 1. On note

$$\mathscr{P}(p) : \forall (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{C}^{*p} \qquad \left|\sum_{i=1}^{p} z_i\right| = \sum_{i=1}^{p} |z_i| \quad \Longrightarrow \quad \forall k \in [\![1\,;\, p]\!] \qquad \exists \lambda_k > 0 \quad | \quad z_k = \lambda_k z_1$$

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^{*2}$ tel que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. On a

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\bar{z_1} z_2) + |z_2|^2$$

On en déduit $\qquad \mathrm{Re}\,(\bar{z_1} z_2) = \bar{z_1} z_2$

ce qui équivaut à dire $\bar{z_1} z_2 \geqslant 0$ et même $\bar{z_1} z_2 > 0$ puisque z_1, z_2 sont non nuls. Ainsi, on a

$$z_2 = \lambda_2 z_1 \quad \text{avec} \quad \lambda_2 = \frac{\bar{z_1} z_2}{|z_1|^2} > 0$$

On généralise pour p entier quelconque avec $p \geqslant 2$. Soit $(z_1, \ldots, z_p) \in (\mathbb{C}^*)^p$ tel que $\left|\sum\limits_{i=1}^{p} z_i\right| = \sum\limits_{i=1}^{p} |z_i|$ et $k \in [\![2\,;\, p]\!]$. Par inégalité triangulaire, on a

$$\left|\sum_{i=1}^{p} z_i\right| \leqslant |z_1 + z_k| + \sum_{i \in [\![1\,;\, p]\!] \smallsetminus \{1,k\}} |z_i| \leqslant \sum_{i=1}^{p} |z_i|$$

Ainsi, les inégalités sont des égalités et on en déduit notamment $|z_1 + z_k| = |z_1| + |z_k|$ d'où l'existence de $\lambda_k > 0$ tel que $z_k = \lambda_k z_1$. On conclut

$$\boxed{\forall k \in [\![1\,;\, p]\!] \qquad \exists \lambda_k > 0 \quad | \quad z_k = \lambda_k z_1}$$

Variante : On peut aussi procéder par récurrence. On suppose $\mathscr{P}(p)$ vraie pour $p \geqslant 2$ entier fixé. Soit $(z_1, \ldots, z_{p+1}) \in (\mathbb{C}^*)^{p+1}$ tel que $\left|\sum\limits_{i=1}^{p+1} z_i\right| = \sum\limits_{i=1}^{p+1} |z_i|$. On pose $\mathrm{Z} = \sum\limits_{i=1}^{p} z_i$. On a par inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{i=1}^{p+1} z_i\right| = |\mathrm{Z} + z_{p+1}| \leqslant |\mathrm{Z}| + |z_{p+1}| \leqslant \sum_{i=1}^{p+1} |z_i|$$

et le inégalité sont donc des égalités. On en déduit en particulier $\left|\sum\limits_{i=1}^{p} z_i\right| = \sum\limits_{i=1}^{p} |z_i|$ d'où $z_k = \lambda_k z_1$ avec $\lambda_k > 0$ pour tout $k \in [\![1\,;\, p]\!]$ d'après l'hypothèse de récurrence. Par conséquent, on a

$$|\alpha z_1 + z_{n+1}| = \alpha\,|z_1| + |z_{p+1}| \quad \text{avec} \quad \alpha = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k > 0$$

Après factorisation par α, on se ramène exactement au cas $p = 2$ et on conclut.

2. On a

$$\mathrm{Q} = (\mathrm{X} - 1)\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k = a_n \mathrm{X}^{n+1} - \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})\mathrm{X}^k\right)$$

et on remarque $a_k - a_{k-1} > 0$ pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Par inégalité triangulaire inverse, il vient

$$|\mathrm{Q}(z)| \geqslant a_n |z|^{n+1} - \left| a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) z^k \right|$$

et par inégalité triangulaire, on a

$$\left| a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) z^k \right| \leqslant a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) |z|^k$$

Ainsi $$|\mathrm{Q}(z)| \geqslant a_n |z|^{n+1} - \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) |z|^k \right)$$

On conclut $$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \qquad |\mathrm{Q}(z)| \geqslant \mathrm{Q}(|z|)}$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{P}(z) = 0$. On a donc $\mathrm{Q}(z) = 0$ et d'après l'inégalité établie à la question précédente, il vient

$$0 \geqslant \mathrm{Q}(|z|) = (|z| - 1)\,\mathrm{P}(|z|)$$

On observe $$\mathrm{P}(|z|) = \sum_{k=0}^{n} a_k |z|^k > 0$$

On en déduit $|z| \leqslant 1$. Supposons $|z| = 1$. Si z est réel, alors $z = \pm 1$. On a clairement $\mathrm{P}(1) > 0$. Si $n = 2p$ avec p entier non nul, on a

$$\mathrm{P}(-1) = \sum_{k=0}^{2p} a_k (-1)^k = a_0 + \sum_{k=1}^{p} (a_{2k} - a_{2k-1}) > 0$$

Si $n = 2p + 1$ avec p entier, on a

$$\mathrm{P}(-1) = \sum_{k=0}^{p} (a_{2k} - a_{2k+1}) < 0$$

Dans tous les cas, on constate que $\mathrm{P}(-1) \neq 0$. Par conséquent, on a $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$. Ainsi, la famille $(z^k)_{k \in [\![0\,;\,n]\!]}$ n'est pas d'argument constant modulo 2π et d'après le résultat de la première question, il vient

$$\left| a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) z^k \right| < a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) |z|^k$$

et par conséquent $$|\mathrm{Q}(z)| > \mathrm{Q}(|z|)$$

qui implique $|z| - 1 < 0$. On conclut

$$\boxed{\text{Les racines de P sont de module} < 1.}$$

Exercice 7 (Centrale 2024)

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices matrices $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que M et M^{-1} sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1. Montrer $$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}) \;:\; |\det \mathrm{M}| = 1\}$$
2. Soit d entier non nul et $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{M}^d = \mathrm{I}_n$. On pose $\mathrm{A} = \dfrac{\mathrm{M} - \mathrm{I}_n}{3}$. Étudier la convergence de la suite $(\mathrm{A}^k)_k$.
3. Montrer qu'il existe un entier K_n majorant le cardinal des sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Corrigé : 1. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. On dispose de $\mathrm{N} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $\mathrm{MN} = \mathrm{NM} = \mathrm{I}_n$. On en déduit $1 = \det(\mathrm{M})\det(\mathrm{N})$ d'où $\det \mathrm{M}$ est un inversible de $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire dans $\{-1, 1\}$. Réciproquement, si $|\det(\mathrm{M})| = 1$, alors

$$\det(\mathrm{M})\mathrm{M}\mathrm{Com}(\mathrm{M})^\top = \det(\mathrm{M})\mathrm{Com}(\mathrm{M})^\top\mathrm{M} = \det(\mathrm{M})^2\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}) \;:\; |\det(\mathrm{M})| = 1\}}$$

2. Le polynôme scindé à racines simples $\mathrm{X}^d - 1 = \prod_{k=0}^{d-1}(\mathrm{X} - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{d}})$ est annulateur de M. On en déduit qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec $\mathrm{P} = \mathrm{diag}(\omega^0, \ldots, \omega^{d-1})$ où $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{d}}$. Par suite, on a

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{diag}\left(\frac{\omega^\ell - 1}{3}\right)_{0\leqslant \ell \leqslant d-1}$$

Or $$\forall \ell \in [\![0\,;\, d-1]\!] \qquad \left|\frac{\omega^\ell - 1}{3}\right| \leqslant \frac{|\omega^\ell| + |1|}{3} = \frac{2}{3}$$

d'où $$\mathrm{diag}\left(\left(\frac{\omega^\ell - 1}{3}\right)^k\right)_{0\leqslant \ell\leqslant d-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

et par continuité du produit matriciel, on conclut

$$\boxed{\mathrm{A}^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0}$$

3. On pose $$\varphi\colon \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \\ \quad \mathrm{M} \quad\longmapsto \overline{\mathrm{M}} \end{cases}$$

avec, pour $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, la matrice $\overline{\mathrm{M}}$ définie par $\overline{\mathrm{M}} = (\overline{m_{i,j}})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Par compatibilité de l'addition et de la multiplication avec la relation de congruence, l'application φ est un morphisme d'anneaux. Par conséquent, elle induit un morphisme de groupes multiplicatifs entre les inversibles des anneaux de départ et d'arrivée, à savoir de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}), \times)$ sur $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}), \times)$. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ et soit $\mathrm{M} \in \mathrm{G}$ telle $\varphi(\mathrm{M}) = \varphi(\mathrm{I}_n)$. On a $\mathrm{M} - \mathrm{I}_n \in 3\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ d'où $\mathrm{A} = \dfrac{\mathrm{M} - \mathrm{I}_n}{3} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Notant d l'ordre du groupe G, on a $\mathrm{M}^d = \mathrm{I}_n$ et d'après le résultat de la question précédente, il vient $\mathrm{A}^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Or, la suite de matrices $(\mathrm{A}^k)_k$ est à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ et convergente donc stationnaire. On en déduit que $\mathrm{A}^k = 0$ à partir d'un certain rang. Il en résulte que la matrice A est à la fois nilpotente et diagonalisable donc nulle. Par conséquent, le morphisme d'anneaux φ induit un isomorphisme de groupes de $(\mathrm{G}, \times)$ sur son image. Il s'ensuit

$$\mathrm{Card}\ \mathrm{G} = \mathrm{Card}\ \varphi(\mathrm{G}) \leqslant \mathrm{Card}\ \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$

Et on conclut

$$\boxed{\text{L'entier } \mathrm{K}_n = 3^{n^2} \text{ majore le cardinal des sous-groupes finis de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}).}$$

Exercice 8 (X 2024)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn. Que dire d'une partie A de E à la fois ouverte et fermée ?

Corrigé : Soit A une partie ouverte et fermée et non vide de E. Supposons $\mathrm{A} \neq \mathrm{E}$. Soit $a \in \mathrm{A}$ et $b \notin \mathrm{A}$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = a + t(b-a) \quad \text{et} \quad \mathrm{I} = \{t \in [\,0\,;1\,] \mid \varphi(t) \in \mathrm{A}\}$$

L'ensemble I est une partie non vide car $0 \in \mathrm{I}$ et majorée par 1 donc admet une borne supérieure finie $\alpha \in [\,0\,;1\,]$. Par caractérisation séquentielle, il existe $(\alpha_n)_n \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}}$ telle que $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$. L'application φ est continue car $\|b-a\|$-lipschitzienne et par continuité, on a

$$\varphi(\alpha_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(\alpha) \in \bar{\mathrm{A}} = \mathrm{A}$$

Par ailleurs, l'ensemble A est ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(\varphi(\alpha), r) \subset \mathrm{A}$. Il s'ensuit

$$\varphi\left(\alpha + \frac{r}{2\|b-a\|}\right) = \varphi(\alpha) + \frac{r}{2}\frac{b-a}{\|b-a\|} \in \mathrm{B}(\varphi(\alpha), r) \subset \mathrm{A} \quad \text{et} \quad \alpha + \frac{r}{2\|b-a\|} > \alpha$$

ce qui est absurde par définition de α en tant que borne supérieure de I. L'hypothèse qu'il existe une partie A ouverte et fermée non vide de E et distincte de E est donc fausse. On conclut

$$\boxed{\text{Les parties ouvertes et fermés de E sont } \varnothing \text{ et E lui-même.}}$$

Variantes : 1. On a $\varphi(1) = b \notin \mathrm{A}$ d'où $\alpha < 1$ et par définition de α, on a $\varphi(t) \notin \mathrm{A}$ pour tout $t \in \,]\,\alpha\,;1\,]$. Comme $\mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{A}$ est fermé, considérant une suite $(\beta_n)_n \in \,]\,\alpha\,;1\,]^{\mathbb{N}}$, il vient par continuité

$$\varphi(\beta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(\alpha) \in \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{A}$$

ce qui contredit $\varphi(\alpha) \in \mathrm{A}$.

2. On montre que $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$ est continue. Si $x \in \mathrm{A}$, alors il existe U ouvert $\subset \mathrm{A}$ tel que $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(y) = 1$ pour tout $y \in \mathrm{U}$ d'où la continuité. Si $x \notin \mathrm{A}$, on fait de même puisque $\mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{A}$ est ouvert. Ainsi, on a $t \mapsto \mathbb{1}_{\mathrm{A}}(xt + (1-t)y)$ continue avec $x \in \mathrm{A}$ et $y \notin \mathrm{A}$ et on obtient une contradiction.

Exercice 9 (ENS 2024)

On pose $$\forall x > 0 \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On pourra utiliser les égalité $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(1) = 1$.

1. Montrer que pour k entier non nul, on a

$$\Gamma(k) = (k-1)! \quad \text{et} \quad \Gamma(k+1/2) \leqslant k!$$

2. Soit $\sigma > 0$ et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble discret telle que

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \mathbb{P}(|\mathrm{X}| > t) \leqslant 2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

Montrer $$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{E}(|\mathrm{X}|^k) \leqslant (2\sigma^2)^{k/2} k\Gamma(k/2)$$

3. On suppose de plus $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 0$. Montrer

$$\forall s > 0 \qquad \mathbb{E}(\mathrm{e}^{s\mathrm{X}}) \leqslant \mathrm{e}^{4\sigma^2 s^2}$$

Corrigé : 1. Par intégration par parties, on trouve

$$\forall x > 0 \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Par récurrence, on en déduit pour k entier non nul

$$\Gamma(k) = (k-1)! \quad \text{et} \quad \Gamma(k+1/2) = \Gamma(1/2)\prod_{\ell=1}^{k}\left(\ell - \frac{1}{2}\right)$$

On a $\sqrt{\pi} \leqslant 4$ (en considérant l'aire d'un cercle de rayon égal à 1 inclus dans un carré de côté égal à 2) et pour k entier non nul

$$\Gamma(k+1/2) \leqslant \prod_{\ell=2}^{k} \ell \leqslant k!$$

On conclut $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \Gamma(k) = (k-1)! \quad \text{et} \quad \Gamma(k+1/2) \leqslant k!}$

2. On note $\mathrm{X}^2(\Omega) = \{y_n, n \in \mathbb{N}\}$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|\mathrm{X}|^k) = \mathbb{E}((\mathrm{X}^2)^{k/2} &= \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n^{k/2}\mathbb{P}(\mathrm{X}^2 = y_n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^{y_n} \frac{k}{2} t^{k/2-1}\,\mathrm{d}t \mathbb{P}(\mathrm{X}^2 = y_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^{+\infty} \frac{k}{2} t^{k/2-1} \mathbb{1}_{[\,0\,;y_n\,[}(t)\,\mathrm{d}t\mathbb{P}(\mathrm{X}^2 = y_n)\end{aligned}$$

On pose $\qquad \forall (n,t) \in \mathbb{N} \times \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(t) = \dfrac{k}{2} t^{k/2-1} \mathbb{1}_{[\,0\,;y_n\,[}(t)\mathbb{P}(\mathrm{X}^2 = y_n)$

La série $\sum u_n$ converge simplement et sa somme $t \mapsto \mathbb{P}(\mathrm{X}^2 > t)\dfrac{k}{2}t^{\frac{k}{2}-1}$ est continue par morceaux puisque ses points de discontinuité sont les y_k qui appartiennent à un ensemble discret. Puis, on a

$$\sum \int_0^{+\infty} |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = \sum y_n^{k/2}\mathbb{P}(\mathrm{X}^2 = y_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n^{k/2} \sum_{\ell\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{[\,\ell\,;\ell+1\,[}(y_n)\mathbb{P}(\mathrm{X}^2 = y_n)$$

D'après le théorème de Fubini pour des familles positives, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n^{k/2} \sum_{\ell\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{[\,\ell\,;\ell+1\,[}(y_n)\mathbb{P}(\mathrm{X}^2 = y_n) &= \sum_{\ell\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n^{k/2} \mathbb{1}_{[\,\ell\,;\ell+1\,[}(y_n)\mathbb{P}(\mathrm{X}^2 = y_n) \\ &\leqslant \sum_{\ell\in\mathbb{N}} (\ell+1)^{k/2} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{[\,\ell\,;\ell+1\,[}(y_n)\mathbb{P}(\mathrm{X}^2 = y_n) \\ &\leqslant \sum_{\ell\in\mathbb{N}} (\ell+1)^{k/2} \left[\mathbb{P}(\mathrm{X}^2 \geqslant \ell) - \mathbb{P}(\mathrm{X}^2 \geqslant \ell+1)\right] \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n^{\frac{k}{2}} \sum_{\ell\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{[\,\ell\,;\ell+1\,[}(y_n)\mathbb{P}(\mathrm{X}^2 = y_n) &\leqslant \sum_{\ell\in\mathbb{N}} (\ell+1)^{k/2}\mathbb{P}(\mathrm{X}^2 \geqslant \ell) \leqslant \sum_{\ell\in\mathbb{N}} (\ell+1)^{k/2} 2\mathrm{e}^{-\frac{\ell}{2\sigma^2}} < +\infty\end{aligned}$$

Ainsi, on peut permuter les symboles Σ et $\displaystyle\int$ et il vient

$$\mathbb{E}(|\mathrm{X}|^k) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{k}{2} t^{k/2-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{[\,0\,;y_n\,[}(t)\mathbb{P}(\mathrm{X}^2 = y_n)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{k}{2} t^{k/2-1}\mathbb{P}(\mathrm{X}^2 \geqslant t)\,\mathrm{d}t$$

d'où $\qquad \mathbb{E}(|\mathrm{X}|^k) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{k}{2} t^{k/2-1} 2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$

Avec le changement de variables $u = t/2\sigma^2$, il vient

$$\mathbb{E}(|\mathrm{X}|^k) \leqslant k(2\sigma^2)^k \int_0^{+\infty} u^{k/2-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

On conclut $\boxed{\mathbb{E}(|\mathrm{X}|^k) \leqslant (2\sigma^2)^k k\Gamma\left(k/2\right)}$

3. Soit $s > 0$. On a

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{s\mathrm{X}}) = \sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} \mathrm{e}^{sx}\mathbb{P}(\mathrm{X} = x) = \sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k x^k}{k!}\mathbb{P}(\mathrm{X} = x)\right)$$

On vérifie la sommabilité

$$\sum_{x\in \mathrm{X}(\Omega)} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{s^k |x|^k}{k!} \mathbb{P}(\mathrm{X}=x) \right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{s^k}{k!} \mathbb{E}(|\mathrm{X}|^k) \leqslant 1 + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{s^k}{k!} (2\sigma^2)^{k/2} k\Gamma(k/2)$$

Pour les indices pairs, il vient en remarquant $2k!^2 \leqslant (2k)!$ pour k entier non nul

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(2s^2\sigma^2)^k}{(2k)!} 2k\Gamma(k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (2s^2\sigma^2)^k \frac{2k!}{(2k)!} \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(2s^2\sigma^2)^k}{k!} < +\infty$$

Pour les indices impairs, on obtient

$$\sqrt{2s^2\sigma^2}\Gamma(1/2) + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(\sqrt{2}s\sigma)^{2k+1}}{(2k+1)!} (2k+1) \underbrace{\Gamma(k+1/2)}_{\leqslant k!} \leqslant \sqrt{2s^2\sigma^2} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(2s\sigma^2)^k}{k!} < +\infty$$

Ainsi, la famille est sommable. D'après le théorème de Fubini et avec l'hypothèse $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 0$, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{e}^{s\mathrm{X}}) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{s^k}{k!} \left(\sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} x^k \mathbb{P}(\mathrm{X}=x) \right) \\
&= 1 + \sum_{k\geqslant 2} \frac{s^k}{k!} \left(\sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} x^k \mathbb{P}(\mathrm{X}=x) \right) \\
\mathbb{E}(\mathrm{e}^{s\mathrm{X}}) &\leqslant 1 + \sum_{k\geqslant 2} \frac{s^k}{k!} \mathbb{E}(|\mathrm{X}|^k) \leqslant 1 + \sum_{k\geqslant 2} \frac{s^k}{k!} (2\sigma^2)k/2k\Gamma(k/2)
\end{aligned}$$

d'où, en séparant indices pairs et impairs par sommation paquets

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{e}^{s\mathrm{X}}) &\leqslant 1 + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(2s^2\sigma^2)^k}{k!} + \sqrt{2s^2\sigma^2} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(2s\sigma^2)^k}{k!} \\
&\leqslant \mathrm{e}^{2s^2\sigma^2} + \sqrt{2s^2\sigma^2} \left(\mathrm{e}^{2s^2\sigma^2} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Pour $u > 0$, on a les équivalences

$$\mathrm{e}^u + \sqrt{u}\,(\mathrm{e}^u - 1) \leqslant \mathrm{e}^{2u} \iff \sqrt{u}\,(\mathrm{e}^u - 1) \leqslant \mathrm{e}^u\,(\mathrm{e}^u - 1) \iff \sqrt{u} \leqslant \mathrm{e}^u$$

ce qui est vrai et on conclut $\boxed{\forall s > 0 \qquad \mathbb{E}(\mathrm{e}^{s\mathrm{X}}) \leqslant \mathrm{e}^{4s^2\sigma^2}}$