Exercice 1 (Centrale 2023)

1. Rappeler la définition de la fonction indicatrice d'Euler puis, pour n entier non nul, exprimer $\varphi(n)$ en fonction de sa décomposition en facteurs premiers.
2. Pour n entier non nul, calculer $\sum\limits_{d|n}\varphi(d)$.
3. En déduire le déterminant de $\mathrm{C} = \left(i \wedge j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec n entier non nul.

Corrigé : 1. On définit

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \varphi(n) = \mathrm{Card}\,\{k \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!] \mid k \wedge n = 1\}$$

Pour $n \geqslant 2$, on note $n = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs premiers avec les p_i premiers deux à deux distincts et les α_i entiers non nuls. D'après le théorème chinois et le comptage des diviseurs d'une puissance d'un nombre premier, il vient

$$\varphi\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{r}\varphi(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{r}\varphi(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{r}(p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i-1})$$

D'où
$$\boxed{\varphi\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right) = n\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)}$$

2. On a
$$[\![\, 1\,;\, n\,]\!] = \bigsqcup_{d|n}\{k \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!] \mid k \wedge n = d\}$$

Par ailleurs, pour $d|n$, on a

$$k \wedge n = d \iff \exists!(k', n') \in \mathbb{Z}^2 \quad | \quad k = k'd \qquad n = n'd \quad \text{et} \quad k' \wedge n' = 1$$

Comme n est entier non nul, alors $n' = \dfrac{n}{d}$ l'est également. Ainsi, on peut mettre en bijection $k \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!]$ vérifiant $k \wedge n = d$ avec $k' \in [\![\, 1\,;\, n'\,]\!]$ vérifiant $k' \wedge n' = 1$. Il s'ensuit

$$\mathrm{Card}\,\{k \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!] \mid k \wedge n = d\} = \mathrm{Card}\,\{k' \in [\![\, 1\,;\, n'\,]\!] \mid k' \wedge n' = 1\} = \varphi(n')$$

Comme il s'agit d'union disjointe, on obtient

$$\mathrm{Card}\,[\![\, 1\,;\, n\,]\!] = \sum_{d|n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

et comme l'application $d \mapsto \dfrac{n}{d}$ réalise une permutation de l'ensemble des diviseurs de n (involutive), on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{d|n}\varphi(d) = n}$$

3. Soit $(i, j) \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!]$. On rappelle que pour d entier, on a

$$d|i \wedge j \iff d|i \quad \text{et} \quad d|j$$

D'après la relation précédemment établie, il vient

$$i \wedge j = \sum_{d|i\wedge j}\varphi(d) = \sum_{d|i,\, d|j}\varphi(d) = \sum_{k=1}^{n}\varphi(k)\mathbb{1}_{\mathcal{D}_i}(k)\mathbb{1}_{\mathcal{D}_j}(k) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$$

avec
$$a_{i,k} = \varphi(k)\mathbb{1}_{\mathcal{D}_i}(k) \quad \text{et} \quad b_{k,j} = \mathbb{1}_{\mathcal{D}_j}(k)$$

d'où
$$\mathrm{C} = \mathrm{AB} \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \left(b_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

La matrice A est triangulaire inférieure et la matrice B est triangulaire supérieure. Ainsi, on obtient

$$\det \mathrm{C} = (\det \mathrm{A})(\det \mathrm{B}) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,i} \right) \left(\prod_{i=1}^{n} b_{i,i} \right)$$

Et on conclut

$$\boxed{\det \mathrm{C} = \prod_{k=1}^{n} \varphi(k)}$$

Exercice 2 (Centrale 2022)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle. Si A est un événement non négligeable, on définit sous réserve d'existence

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{A}) = \sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} x \mathbb{P}(\mathrm{X} = x|\mathrm{A})$$

1. Montrer que si X est d'espérance finie, alors $\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{A})$ est bien définie.
2. Si X suit la loi géométrique de paramètre $p \in \,]\,0\,;1\,[$, calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{X} > m)$ pour m entier.
3. Montrer que si $(\mathrm{A}_k)_k$ est un système complet d'événements et si X est d'espérance finie, alors

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{A}_k)\mathbb{P}(\mathrm{A}_k)$$

Corrigé : 1. On a

$$\forall x \in \mathrm{X}(\Omega) \qquad |x|\,\mathbb{P}(\mathrm{X} = x|\mathrm{A}) = \frac{|x|\,\mathbb{P}\left(\{\mathrm{X} = x\} \cap \mathrm{A}\right)}{\mathbb{P}(\mathrm{A})} \leqslant \frac{|x|\,\mathbb{P}(\mathrm{X} = x)}{\mathbb{P}(\mathrm{A})}$$

La famille $(x\mathbb{P}(\mathrm{X} = x))_{x \in \mathrm{X}(\Omega)}$ est sommable et par comparaison, la famille $(x\mathbb{P}(\mathrm{X} = x|\mathrm{A}))_{x \in \mathrm{X}(\Omega)}$ l'est aussi et on conclut

$$\boxed{\text{Si X est d'espérance finie, alors } \mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{A}) \text{ est bien définie.}}$$

2. Soit $\mathrm{X} \sim \mathscr{G}(p)$ et m entier. On a

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} > m) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = (1-p)^m$$

puis
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{X} > m) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(\mathrm{X} = k|\mathrm{X} > m) \\ &= \sum_{k=m+1}^{+\infty} k\frac{\mathbb{P}\left(\{\mathrm{X} = k\} \cap \{\mathrm{X} > m\}\right)}{\mathbb{P}(\mathrm{X} > m)} = \frac{1}{\mathbb{P}(\mathrm{X} > m)} \sum_{k=m+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(\mathrm{X} = k)\end{aligned}$$

d'où
$$\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{X} > m) = \frac{1}{(1-p)^m} \sum_{k=m+1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1}$$

Pour $x \in \,]-1\,;1\,[$, on a par dérivation de séries entières

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{1-x}\right] = \frac{1}{(1-x)^2}$$

puis
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{k=0}^{n} x^k\right] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right] = \frac{1}{(1-x)^2}\left[-(m+1)x^m(1-x) + 1 - x^{m+1}\right]\end{aligned}$$

d'où
$$\sum_{k=m+1}^{+\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} - \sum_{k=1}^{m} kx^{k+1} = \frac{x^m}{(1-x)^2}\left[(m+1)(1-x) + x\right]$$

Ainsi
$$\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{X} > m) = \frac{1}{(1-p)^m} \frac{p(1-p)^m}{p^2}(mp+1)$$

On conclut
$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{X} > m) = \frac{mp+1}{p}}$$

3. On considère l'utilisation étendue de la notation *probabilité conditionnelle* qui assure un sens, pour $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{A}^2$ à $\mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ même si l'événement A est négligeable. Considérons la famille $(x\mathbb{P}(\{\mathrm{X}=x\}\cap\mathrm{A}_k))_{(x,k)\in\mathrm{X}(\Omega)\times\mathbb{N}}$. Pour $x \in \mathrm{X}(\Omega)$, on a par σ-additivité

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x\mathbb{P}(\{\mathrm{X}=x\}\cap\mathrm{A}_k) = x\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\{\mathrm{X}=x\}\cap\mathrm{A}_k) = x\mathbb{P}(\mathrm{X}=x)$$

et $(x\mathbb{P}(\mathrm{X}=x))_{x\in\mathrm{X}(\Omega)}$ est sommable puisque la variable X est d'espérance finie. Par interversion de l'ordre de sommation, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} x\mathbb{P}(\mathrm{X}=x) &= \sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)}\sum_{k=0}^{+\infty} x\mathbb{P}(\{\mathrm{X}=x\}\cap\mathrm{A}_k)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} x\mathbb{P}(\{\mathrm{X}=x\}\cap\mathrm{A}_k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} x\mathbb{P}(\mathrm{X}=x|\mathrm{A}_k)\mathbb{P}(\mathrm{A}_k)\end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{A}_k)\mathbb{P}(\mathrm{A}_k)}$$

Remarque : Il s'agit de la *formule de l'espérance totale.*

Exercice 3 (Centrale 2023)

Soit E euclidien et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Rappeler les identités de polarisation et l'identité du parallélogramme.
2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) $\exists c \in \mathbb{R} \mid \forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \quad \langle f(x), f(y)\rangle = c\,\langle x, y\rangle$;
   (b) $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \quad \langle x, y\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle f(x), f(y)\rangle = 0$.
3. Trouver les $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $u(\mathrm{F}^\perp) \subset u(\mathrm{F})^\perp$ pour tout F sev de E.

Corrigé : 1. On a pour les identité de polarisation

$$\boxed{\begin{aligned}\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle x, y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\end{aligned}}$$

et pour l'identité du parallélogramme

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)}$$

2. L'implication $(a) \Longrightarrow (b)$ est évidente. On suppose l'assertion (b) vraie. Soient u, v vecteurs unitaires de E. On a

$$\langle u+v, u-v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$$

Soit v vecteur unitaire de E. Pour $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, posant $u = \dfrac{x}{\|x\|}$, on a d'après le résultat de la question précédente

$$\langle u+v, u-v\rangle = 0$$

Par hypothèse sur f, il s'ensuit $\qquad \langle f(u+v), f(u-v)\rangle = 0$

et on a $\qquad \langle f(u+v), f(u-v)\rangle = \langle f(u) + f(v), f(u) - f(v)\rangle = \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2$

d'où
$$\forall x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\} \qquad \|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| = \|f(v)\|$$

Ainsi
$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|f(x)\| = \|f(v)\|\|x\|$$

l'égalité étant trivialement vérifiée pour $x = 0_\mathrm{E}$. Notant $c = \|f(v)\|^2$, on obtient

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|f(x)\| = \sqrt{c}\|x\|$$

et par polarisation, on en déduit l'assertion (a). On conclut

$$\boxed{\text{Les assertions } (a) \text{ et } (b) \text{ sont équivalentes.}}$$

3. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $u(\mathrm{F}^\perp) \subset \mathrm{F}^\perp$ pour tout F sev de E. Ainsi, pour tout $a \in \mathrm{E}$, on a $u(\mathrm{Vect}\,(a)^\perp) \subset u(\mathrm{Vect}\,(a))^\perp$ ce qui signifie, en observant $u(\mathrm{Vect}\,(a)) = \mathrm{Vect}\,(u(a))$

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \langle x, a\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle u(x), u(a)\rangle = 0$$

et ceci vaut pour tout $a \in \mathrm{E}$. On en déduit que l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité. Réciproquement, on suppose que l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité ou, de manière équivalente, qu'il existe c réel tel que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle u(x), u(y)\rangle = c\,\langle x, y\rangle$$

Soit F sev de E et $x \in \mathrm{F}^{\perp}$. Alors, il vient

$$\forall y \in \mathrm{F} \qquad \langle u(x), u(y) \rangle = c \langle x, y \rangle = 0$$

ce qui prouve $u(x) \in u(\mathrm{F})^{\perp}$ d'où $u(\mathrm{F}^{\perp}) \subset \mathrm{F}^{\perp}$. On conclut

$$\boxed{\text{Les endomorphismes solutions sont ceux conservant l'orthogonalité.}}$$

Exercice 4 (Mines 2022)

Pour n entier non nul, on note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n, φ la fonction indicatrice d'Euler et ζ le fonction de Riemann.

1. Montrer $$\forall \alpha > 1 \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)^2$$

   Que dire pour $\alpha \leqslant 1$?

2. Montrer $$\forall \alpha > 2 \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)}$$

   Que dire pour $\alpha \leqslant 2$?

Corrigé : 1. Soit α réel. On opte pour le point de vue des familles sommables. Pour n entier non nul, on note D_n l'ensemble des diviseurs de n. On a dans $[0\,;+\infty]$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{d \in \mathrm{D}_n} \frac{1}{n^\alpha} \right)$$

On pose $$\Lambda = \{(n,d) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ : \ d|n\}$$

La famille $(\{n\} \times \mathrm{D}_n)_{n \geqslant 1}$ est un recouvrement disjoint de Λ. Ainsi, d'après le théorème de sommation par paquets pour une famille à termes positifs, on trouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{d \in \mathrm{D}_n} \frac{1}{n^\alpha} \right) = \sum_{(n,d) \in \Lambda} \frac{1}{n^\alpha}$$

On pose $$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_k = \{(n,d) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid n = dk\}$$

La famille $(\mathrm{I}_k)_{k \geqslant 1}$ est un recouvrement disjoint de Λ et par sommation par paquets de familles à termes positifs, il vient

$$\sum_{(n,d) \in \Lambda} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{(n,d) \in \mathrm{I}_k} \frac{1}{n^\alpha} \right)$$

On remarque $$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_k = \{(dk, d),\ d \in \mathbb{N}^*\}$$

On obtient $$\sum_{(n,d) \in \Lambda} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{(dk)^\alpha} \right) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right) \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^\alpha} \right) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right)^2$$

autrement dit $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n^\alpha} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \right)^2$$

l'égalité ayant lieu dans $[0\,;+\infty]$ pour tout α réel. Enfin, on a par critère de Riemann

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty \iff \alpha \leqslant 1$$

Et on conclut $$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n^\alpha} = \begin{cases} \zeta(\alpha)^2 & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}}$$

2. Soit α réel. Dans $[0\,;+\infty]$, d'après le théorème de Fubini pour des familles à termes positifs, il vient

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}\right)=\sum_{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{\varphi(n)}{(kn)^\alpha}$$

On pose $\qquad \forall \ell\in\mathbb{N}^* \qquad \mathrm{J}_\ell=\{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2 \mid kn=\ell\}$

La famille $(\mathrm{J}_\ell)_{\ell\geqslant 1}$ est un recouvrement disjoint de $(\mathbb{N}^*)^2$ et par sommation par paquets de famille à termes positifs, il vient

$$\sum_{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{\varphi(n)}{(kn)^\alpha}=\sum_{\ell=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,n)\in\mathrm{J}_\ell}\frac{\varphi(n)}{\ell^\alpha}\right)=\sum_{\ell=1}^{+\infty}\frac{1}{\ell^\alpha}\sum_{n\mid\ell}\varphi(n)$$

Puis, on observe pour ℓ entier non nul

$$[\![1\,;\,\ell]\!]=\bigsqcup_{n\mid\ell}\{k\in[\![1\,;\,\ell]\!] \mid k\wedge\ell=n\}$$

et pour n diviseur de ℓ et $k\in[\![1\,;\,\ell]\!]$ tel que $k\wedge\ell=n$, il existe un unique $d\in[\![1\,;\,\ell/n]\!]$ tel que $k=nd$ et $d\wedge\ell/n=1$. Ainsi

$$\begin{aligned}\ell&=\sum_{n\mid\ell}\operatorname{Card}\,\{k\in[\![1\,;\,\ell]\!] \mid k\wedge\ell=n\}\\&=\sum_{n\mid\ell}\operatorname{Card}\,\{d\in[\![1\,;\,\ell/n]\!] \mid d\wedge\ell/n=1\}=\sum_{n\mid\ell}\varphi\left(\frac{\ell}{n}\right)=\sum_{n\mid\ell}\varphi(n)\end{aligned}$$

la dernière égalité résultant du fait que l'application $n\mapsto\dfrac{\ell}{n}$ réalise une permutation de l'ensemble des diviseurs de ℓ. Par conséquent

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}\right)=\sum_{\ell=1}^{+\infty}\frac{1}{\ell^{\alpha-1}}$$

Par critère de Riemann, il vient pour $\alpha>2$

$$\zeta(\alpha)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}=\zeta(\alpha-1)$$

et pour $\alpha\in\,]\,1\,;2\,]$ $\qquad \zeta(\alpha)\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\varphi(n)}{n^\alpha}=+\infty$

Enfin, la minoration $\varphi(n)\geqslant 1$ pour n entier non nul prouve que $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\varphi(n)}{n^\alpha}=+\infty$ pour $\alpha\leqslant 1$ et on conclut

$$\boxed{\forall\alpha\in\mathbb{R}\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}=\begin{cases}\dfrac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)} & \text{si } \alpha>2\\ +\infty & \text{sinon}\end{cases}}$$

Exercice 5 (Mines 2022)

Soit X une variable aléatoire réelle positive dans L^2.

1. Rappeler pourquoi X est d'espérance finie.
2. Établir $$\forall \lambda \geqslant 0 \qquad X \leqslant \lambda \mathbb{E}(X) + X \mathbb{1}_{\{X \geqslant \lambda \mathbb{E}(X)\}}$$
3. On suppose $\mathbb{E}(X^2) > 0$. Montrer $$\forall \lambda \in [0\,;1] \qquad \mathbb{P}\left(X \geqslant \lambda \mathbb{E}(X)\right) \geqslant (1-\lambda)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$$

Corrigé : 1. On a $|X| \leqslant \dfrac{1+X^2}{2}$ et le résultat suit.

2. Soit $\lambda \geqslant 0$. On a
$$X = X\mathbb{1}_{\{X<\lambda\mathbb{E}(X)\}} + X\mathbb{1}_{\{X\geqslant\lambda\mathbb{E}(X)\}} \leqslant \lambda\mathbb{E}(X)\mathbb{1}_{\{X<\lambda\mathbb{E}(X)\}} + X\mathbb{1}_{\{X\geqslant\lambda\mathbb{E}(X)\}}$$

Par positivité de λ et X, il vient $\quad \lambda\mathbb{E}(X)\mathbb{1}_{\{X<\lambda\mathbb{E}(X)\}} \leqslant \lambda\mathbb{E}(X)$

Et on conclut $$\boxed{\forall \lambda \geqslant 0 \qquad X \leqslant \lambda \mathbb{E}(X) + X \mathbb{1}_{\{X \geqslant \lambda \mathbb{E}(X)\}}}$$

3. Soit $\lambda \in [0\,;1]$. Passant à l'espérance, il vient
$$(1-\lambda)\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{\{X\geqslant\lambda\mathbb{E}(X)\}}\right)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient
$$\mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{\{X\geqslant\lambda\mathbb{E}(X)\}}\right)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}\left(\mathbb{1}^2_{\{X\geqslant\lambda\mathbb{E}(X)\}}\right)$$

et $$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}^2_{\{X\geqslant\lambda\mathbb{E}(X)\}}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X\geqslant\lambda\mathbb{E}(X)\}}\right) = \mathbb{P}\left(X \geqslant \lambda\mathbb{E}(X)\right)$$

On conclut $$\boxed{\forall \lambda \in [0\,;1] \qquad \mathbb{P}\left(X \geqslant \lambda \mathbb{E}(X)\right) \geqslant (1-\lambda)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}}$$

Remarque : Il s'agit de l'inégalité de *Paley-Zygmund*.

Exercice 6 (Navale 2019)

Soit la série entière $\sum \binom{2n}{n} x^{2n}$.

1. Déterminer son rayon de convergence. On notera $f(x)$ sa somme.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
3. En déduire une expression de $f(x)$.

Corrigé : 1. Notons $u_n = \binom{2n}{n} r^{2n}$ pour $r > 0$, on a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(2n+2)!}{(2n)!}\frac{(n!)^2}{(n+1)!^2} r^2 = \frac{2(2n+1)}{n+1} r^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4r^2$$

• Si $4r^2 > 1$ ce qui équivaut à $r > 1/2$, la série diverge grossièrement d'où $\mathrm{R} \leqslant 1/2$.
• Si $4t^2 < 1$ ce qui équivaut à $r < 1/2$, la série converge absolument donc son terme général est borné et par suite $\mathrm{R} \geqslant 1/2$.

Ainsi
$$\boxed{\mathrm{R} = \frac{1}{2}}$$

2. Notons $\mathrm{I} = \left] -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right[$. Par dérivation d'une série entière, il vient

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathrm{I} \qquad f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n\binom{2n}{n} x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)\binom{2(n+1)}{n+1} x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)\frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n} x^{2n+1} = 4\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)\binom{2n}{n} x^{2n+1} \end{aligned}$$

Supposant la linéarité *a priori*, il vient

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad f'(x) = 4x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} 2n\binom{2n}{n} x^{2n-1} + 4xf(x) = 4x^2 f'(x) - 4xf(x)$$

Les séries définissant $f(x)$ et $f'(x)$ étant convergentes, ceci justifie la linéarité et on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{I} \qquad (1-4x^2)f'(x) - 4xf(x) = 0}$$

3. La fonction f est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (1-4x^2)y' - 4xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathrm{S_H} = \mathrm{Vect}\,(\varphi) \quad \text{avec} \quad \forall x \in \mathrm{I} \qquad \varphi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} \quad \text{où} \quad \mathrm{A}(x) = \int \frac{4x}{1-4x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln|1-4x^2|$$

D'après l'unicité fournie par le théorème de Cauchy linéaire, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{I} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}}$$

Exercice 7 (Navale 2017)

Soit n entier avec $n \geqslant 2$ et φ l'indicatrice d'Euler.

1. Montrer qu'il y a $\varphi(d)$ éléments de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ d'ordre d un diviseur de n.
2. Établir
$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$
3. En déduire un programme python permettant le calcul de $\varphi(n)$.

Corrigé : 1. Soit d diviseur de n. On a $n = cd$ avec c entier non nul puis

$$\langle \bar{c} \rangle = \{\bar{0}, \bar{c}, \dots, (d-1)\bar{c}\}$$

donc $\langle \bar{c} \rangle$ est de cardinal d. Montrons l'unicité de ce sous-groupe. Soit H sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de cardinal d. Pour $\bar{x} \in \mathrm{H}$ et $x \in \bar{x}$, on a $d\bar{x} = \bar{0}$ d'où $dx \equiv 0\ [n]$, *i.e.* $dx = kn$ avec $k \in \mathbb{Z}$ puis $dx = kdc$ autrement dit $x = kc$ d'où $\bar{x} \in \langle \bar{c} \rangle$. Il s'ensuit que $\mathrm{H} \subset \langle \bar{c} \rangle$ et par égalité des cardinaux, on conclut que $\mathrm{H} = \langle \bar{c} \rangle$. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } d \text{ diviseur de } n, \text{ il existe un unique sous-groupe de } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ de cardinal } d.}$$

Un élément d'ordre d engendre un sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ à d éléments donc engendre $\left\langle \overline{n/d} \right\rangle$. Réciproquement, tout générateur de $\left\langle \overline{n/d} \right\rangle$ est d'ordre d. Comme $\left\langle \overline{n/d} \right\rangle$ est cyclique, il est isomorphe à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et possède donc $\varphi(d)$ générateurs. Ainsi

$$\boxed{\text{Il y a } \varphi(d) \text{ éléments de } (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+) \text{ d'ordre } d.}$$

2. On a l'union disjointe $[\![1\,;\, n]\!] = \bigsqcup_{d|n} \{k \in [\![1\,;\, n]\!], o(k) = d\}$. Passant au cardinal, on conclut

$$\boxed{n = \sum_{d|n} \varphi(d)}$$

3. On observe que $\varphi(n) = n - \sum_{d|n, d<n} \varphi(d)$. On implémente cette approche avec :

```
def phi(n):
    if n==1:
        return 1
    else:
        div=[ k for k in range(1,n) if n%k==0]
        return n-sum([phi(d) for d in div])
```

On peut économiser le cas de base car la liste `div` est vide si `n==1`. C'est plus court mais pas forcément plus lisible ...

```
def phi(n):
    div=[ k for k in range(1,n) if n%k==0]
    return n-sum([phi(d) for d in div])
```

Exercice 8 (Centrale 2021)

Pour x réel, on pose sous réserve de convergence

$$\mathrm{F}(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\quad\text{et}\quad \mathrm{G}(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

et on considère l'équation différentielle sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$$y''+y=\frac{1}{x}\tag{E}$$

1. Déterminer les ensembles de définition de F et G.
2. Tracer la courbe de F.
3. Tracer la courbe de G en expliquant pourquoi la méthode naïve ne convient pas. Faire une conjecture concernant F et G.
4. Soit ϕ de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I ouvert et $x_0\in\mathrm{I}$. À l'aide du développement limité de ϕ, exprimer $\phi''(x_0)$ comme limite d'une expression faisant intervenir $\phi(x_0+h)$ et $\phi(x_0-h)$.
5. En admettant que F soit de classe $\mathscr{C}^2$, vérifier numériquement qu'elle satisfait l'équation (E).
6. Montrer que F et G sont continues sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
7. Montrer que F et G sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
8. Montrer que F et G sont solutions de (E) puis que $\mathrm{F}=\mathrm{G}$.
9. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : 1. On pose

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times[\,0\,;+\infty\,[\qquad f(x,t)=\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\qquad g(x,t)=\frac{\sin(t)}{x+t}$$

Pour x réel, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Pour $x<0$, on a $1\underset{t\to+\infty}{=}\mathrm{O}(f(x,t))$ avec $t\mapsto 1$ d'intégrale divergente d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ également par comparaison de fonctions positives. Pour $x\geqslant 0$, on a

$$\forall t\geqslant 0\qquad 0\leqslant f(x,t)\leqslant\frac{1}{1+t^2}$$

ce qui prouve l'intégrabilité de $t\mapsto f(x,t)$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x<0$, la fonction $t\mapsto g(x,t)$ n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x\geqslant 0$, la fonction $t\mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et une étude de convergence a donc du sens. On a $t\mapsto\dfrac{1}{x+t}$ et $t\mapsto 1-\cos(t)$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$-\frac{1-\cos(t)}{x+t}\xrightarrow[t\to 0]{}0\quad\text{et}\quad -\frac{1-\cos(t)}{x+t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$$

Ainsi, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$

sont de même nature. La seconde converge puisque

$$\frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}\underset{t\to 0}{=}\mathrm{O}(1)\quad\text{et}\quad\frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}\underset{t\to+\infty}{=}\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

On conclut $\boxed{\text{Les fonctions F et G sont définies sur }\mathbb{R}_+.}$

2. On saisit :

```
F=lambda x:integr.quad(lambda t:np.exp(-x*t)/(1+t**2),0,np.inf)[0]

tx=np.linspace(0,10,100)
tF=[F(x) for x in tx]
plt.plot(tx,tF)
plt.show()
```

On observe :

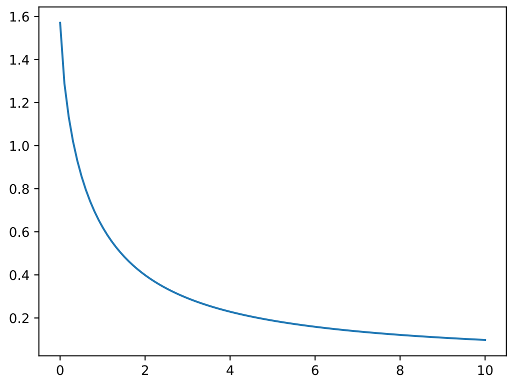

FIGURE 1 – Graphe de F

3. On saisit :

```
G=lambda x:integr.quad(lambda t:np.sin(t)/(x+t),0,np.inf)[0]

tG=[G(x) for x in tx]
plt.plot(tx,tG)
plt.show()
```

On obtient l'avertissement :

```
Warning (from warnings module):
  File "D:/DRIVE CPGE/ORAUX/CENTRALE2/EX023.py", line 18
    G=lambda x:integr.quad(lambda t:np.sin(t)/(x+t),0,np.inf)[0]
IntegrationWarning: The integral is probably divergent, or slowly convergent.
```

On peut raisonnablement imaginer que l'avertissement vient du fait que l'intégrande définissant G n'est pas intégrable. Il s'agit d'un cas d'intégrale semi-convergente. On code plutôt :

```
G=lambda x:integr.quad(lambda t:np.sin(t)/(x+t),0,100)[0]
```

et en superposant les graphes de F et G, on observe :

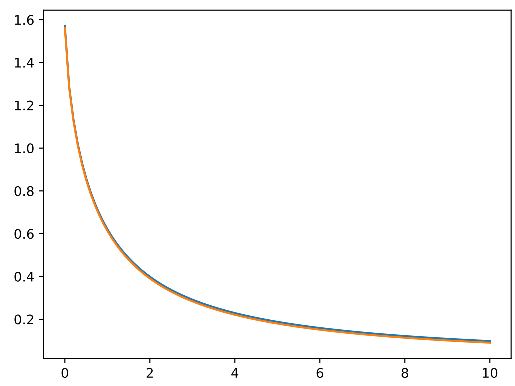

FIGURE 2 – Graphe de G

On conjecture $\boxed{\mathrm{F} = \mathrm{G}}$

4. D'après le théorème de Taylor-Young, on a

$$\phi(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} \phi(x_0) + \phi'(x_0)h + \phi''(x_0)\frac{h^2}{2} + \mathrm{o}(h^2)$$

$$\phi(x_0-h) \underset{h\to 0}{=} \phi(x_0-h) - \phi'(x_0)h + \phi''(x_0)\frac{h^2}{2} + \mathrm{o}(h^2)$$

d'où
$$\phi(x_0+h) - 2\phi(x_0) + \phi(x_0-h) = h^2\phi''(x_0) + \mathrm{o}(h^2)$$

Ainsi
$$\boxed{\frac{\phi(x_0+h) - 2\phi(x_0) + \phi(x_0-h)}{h^2} \xrightarrow[h\to 0]{} \phi''(x_0)}$$

5. On saisit :

```
h=1e-4
tx=np.linspace(.1,10,100)
tdiff=[F(x)+(F(x+h)-2*F(x)+F(x-h))/h**2-1/x for x in tx]
plt.plot(tx,tdiff)
plt.show()
```

On observe :

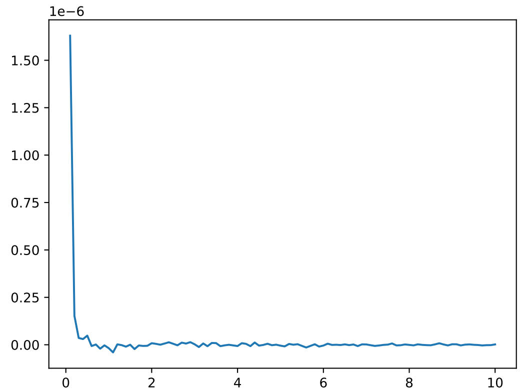

FIGURE 3 – Graphe d'une approximation de $x \mapsto \mathrm{F}''(x) + \mathrm{F}(x) - \dfrac{1}{x}$

La simulation numérique conforte l'idée que la fonction F satisfait l'équation (E).

6. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.
• Pour $x \geqslant 0$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Pour $t \geqslant 0$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

La fonction φ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}\ t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. D'après l'intégration par parties réalisée à la première question, il vient pour $x \geqslant 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{1-\cos(t)}{x+t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Avec la domination

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \left]\,0\,;+\infty\,\right[\qquad 0 \leqslant \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2} \leqslant \frac{1-\cos(t)}{t^2}$$

on établit sans difficulté la continuité de la nouvelle écriture de G et on conclut

$$\boxed{\text{Les fonctions F et G sont définies, continues sur } \mathbb{R}_+.}$$

7. Une domination locale permet d'établir sans difficulté que $\mathrm{F} \in \mathscr{C}^2(\left]\,0\,;+\infty\,\right[,\mathbb{R})$. Pour $x > 0$, on obtient par changement de variable

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} \frac{\cos(x)\sin(u) - \sin(x)\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

Les intégrales $\mathrm{A}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\mathrm{B}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ convergent (intégration par parties). Ainsi, par linéarité

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{G}(x) = \cos(x)\mathrm{A}(x) - \sin(x)\mathrm{B}(x)$$

Les intégrandes des fonctions A et B sont continues et même de classe $\mathscr{C}^1$ donc A et B sont de classe $\mathscr{C}^1$ avec A' et B' de classe $\mathscr{C}^1$ d'où A, B de classe $\mathscr{C}^2$ et par conséquent

$$\boxed{\text{Les fonctions F et G sont de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \left]\,0\,;+\infty\,\right[.}$$

8. Par dérivation sous l'intégrale, il vient

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}''(x) + \mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

et avec $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{A}'(x) = -\frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}'(x) = -\frac{\cos(x)}{x}$$

on trouve finalement

$$\boxed{\text{Les fonctions F et G vérifient } y'' + y = \frac{1}{x} \text{ sur } \left]\,0\,;+\infty\,\right[.}$$

La fonction $\mathrm{F} - \mathrm{G}$ est donc solution de l'équation homogène $y'' + y = 0$ et par conséquent, il existe a, b réels tels que $\mathrm{F} - \mathrm{G} = a\cos + b\sin$. Or, on a (convergence assurée)

$$\forall x > 0 \qquad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

et $\qquad \mathrm{G}(x) = \cos(x)\mathrm{A}(x)\sin(x)\mathrm{B}(x) \quad$ avec $\quad \mathrm{A}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1) \quad$ et $\quad \mathrm{B}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$

Par suite
$$\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
donc la fonction $a\cos + b\sin$ admet une limite en $+\infty$ ce qui prouve $a = b = 0$. Ainsi, on a
$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x)$$
Enfin, par continuité sur $\mathbb{R}_+$, il vient
$$\mathrm{F}(0) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{F}(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{G}(x) = \mathrm{G}(0)$$

Ainsi
$$\boxed{\mathrm{F} = \mathrm{G}}$$

9. On a
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{G}(0) = \mathrm{F}(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Et on conclut
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 9 (Mines-Telecom 2015)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\,(t)^n}$$

1. Justifier que l'intégrale définissant I_n est convergente pour n entier non nul.
2. Montrer la convergence de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 1}$ et préciser sa limite.
3. Préciser la nature et éventuellement la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{I}_n$.
4. Préciser la nature et éventuellement la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \mathrm{I}_n$.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad f_n(t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,(t)^n}$

Pour n entier non nul, on a $f_n \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ et
$$f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n \mathrm{e}^{-nt}$$
d'où l'intégrabilité de f_n en $+\infty$ et on conclut
$$\boxed{\text{L'intégrale définissant } \mathrm{I}_n \text{ pour } n \text{ entier non nul converge.}}$$
2. Pour n entier non nul, on considère I_n comme intégrale sur $]\,0\,;+\infty\,[$, faussement impropre en zéro. On a
$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant f_1(t) \quad \text{et} \quad \forall t > 0 \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
On a $f_1 \in \mathrm{L}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ et par convergence dominée, on conclut
$$\boxed{\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$
3. On a $\mathrm{ch}\,(t) \leqslant \mathrm{e}^t$ pour $t \geqslant 0$ et après intégration, on obtient
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{n} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{I}_n$$
La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge d'où par comparaison
$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \mathrm{I}_n \text{ diverge.}}$$
Variante : Supposons la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{I}_n$ convergente. Pour $t > 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,(t)^n}$ converge en tant que série géométrique convergente et on a
$$\forall t > 0 \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}\,(t)^n} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,(t)} \frac{1}{1 - 1/\,\mathrm{ch}\,(t)} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,(t) - 1}$$
La somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et par intégration terme à terme, on a l'intégrabilité de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et la permutation des symboles $\Sigma/\displaystyle\int$. Or, on trouve
$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\,(t) - 1} \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{\mathrm{ch}\,(t) - 1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{2}{t^2} > 0$$

ce qui contredit la convergence d'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et critère de Riemann. On conclut comme précédemment.

4. La série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \mathrm{I}_n$ est alternée avec $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 1}$ clairement décroissante et de limite nulle d'où la convergence de la série. Soit N entier non nul. Il vient par linéarité du symbole somme

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}(-1)^n \mathrm{I}_n &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^n}{\operatorname{ch}(t)^n}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} -\frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \frac{1-(-1)^{\mathrm{N}}/\operatorname{ch}(t)^{\mathrm{N}}}{1+1/\operatorname{ch}(t)}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{1-(-1)^{\mathrm{N}}/\operatorname{ch}(t)^{\mathrm{N}}}{\operatorname{ch}(t)+1}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Sans difficulté, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}(t)+1}$ converge et par linéarité de l'intégrale (car convergence), il vient

$$\Delta_{\mathrm{N}} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}(-1)^n \mathrm{I}_n + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}(t)+1} = (-1)^{\mathrm{N}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+\operatorname{ch}(t))\operatorname{ch}(t)^{\mathrm{N}}}$$

On observe $|\Delta_{\mathrm{N}}| \leqslant \mathrm{I}_{\mathrm{N}}$ et passant à la limite

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}(t)+1} = \int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)^2} \underbrace{=}_{u=\mathrm{e}^t+1} -2\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2}$$

On conclut $\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \mathrm{I}_n \text{ converge et sa somme vaut } -1.}$

Exercice 10 (Mines-Telecom 2021)

1. Résoudre $x^2 = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p nombre premier.
2. Résoudre $x^2 = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}/34\mathbb{Z}$.

Corrigé : 1. L'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps puisque p est premier. Par intégrité, il vient

$$\boxed{x^2 = x \iff x\,(x - \bar{1}) = \bar{0} \iff x \in \{\bar{0}, \bar{1}\}}$$

2. On a $34 = 2 \times 17$ avec $2 \wedge 17 = 1$. D'après le théorème chinois, on dispose de l'isomorphisme $\pi : \mathbb{Z}/34\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}, \bar{x} \mapsto (\widehat{x}, \dot{x})$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{Z}$, on a

$$\bar{x}^2 = \bar{x} \iff \begin{cases} \widehat{x}^2 = \widehat{x} \\ \dot{x}^2 = \dot{x} \end{cases} \iff (\widehat{x}, \dot{x}) \in \left\{ \left(\widehat{0}, \dot{0}\right), \left(\widehat{1}, \dot{0}\right), \left(\widehat{0}, \dot{1}\right), \left(\widehat{1}, \dot{1}\right) \right\}$$

On a l'égalité $17 - 2 \times 8 = 1$ d'où

$$\widehat{17} = \widehat{1}, \qquad \dot{17} = \dot{0}, \qquad \widehat{-16} = \widehat{0}, \qquad -\dot{16} = \dot{1}$$

et on conclut

$$\boxed{\text{Pour } x \in \mathbb{Z}, \text{ on a } x^2 \equiv x\ [34] \iff \bar{x} \in \left\{\bar{0}, \overline{17}, \overline{-16}, \overline{17 - 16}\right\}}$$

Remarque : En réalité, l'équation $\widehat{x}^2 = \widehat{x}$ est toujours vraie. On a simplement

$$\bar{x}^2 = \bar{x} \iff \dot{x}^2 = \dot{x} \iff x \equiv 0\ [17] \quad \text{ou} \quad x \equiv 1\ [17] \iff \bar{x} \in \{\bar{0}, 1\bar{7}, \bar{1}, 1\bar{8}\}$$

La démarche générale présentée ci-avant aurait plus d'intérêt sur une configuration moins triviale, par exemple avec 3×17...

Exercice 11 (Centrale 2022)

Un *nombre de Carmichael* est un entier $n \geqslant 2$ non premier tel que

$$\forall a \in \mathbb{Z} \qquad a^n \equiv a\ [n]$$

1. Soit $n \geqslant 2$ non premier tel que

$$\forall a \in [\![0\,;\, n-1]\!] \qquad a^n \equiv a\ [n]$$

Montrer que n est un nombre de Carmichael.

2. Écrire une fonction `carmichael(n)` d'argument `n` entier qui renvoie `True` si n est un nombre de Carmichael et `False` sinon.

3. Déterminer à l'aide de l'outil informatique le plus petit nombre de Carmichael.

4. Soit $n = \prod_{i=1}^{r} p_i$ avec $r \geqslant 2$ et les p_i des nombres premiers deux à deux distincts vérifiant $p_i - 1 | n - 1$ pour tout $i \in [\![1\,;\, r]\!]$.

   (a) Montrer $\qquad \forall i \in [\![1\,;\, r]\!] \qquad \forall a \in \mathbb{Z} \qquad a^n \equiv a\ [p_i]$

   (b) Montrer que n est un nombre de Carmichael.

5. Soit n un nombre de Carmichael. Montrer que n est un produit de nombres premiers deux à deux distincts.

6. Soit $(\mathrm{G}, \times)$ un groupe abélien fini.

   (a) Soient x, y dans G avec $o(x) \wedge o(y) = 1$. Montrer que $o(xy) = o(x)o(y)$.

   (b) Soit $x \in \mathrm{G}$. Pour d diviseur de $o(x)$, montrer qu'il existe un élément de G d'ordre d.

   (c) Soit m l'ordre maximal des éléments de G. Montrer que l'ordre de tout élément de G divise m.

   (d) En déduire $\qquad \forall p \in \mathcal{P} \qquad \mathrm{U}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$

7. Soit n un nombre de Carmichael et p un diviseur premier de n. Montrer que $p - 1 | n - 1$.

Corrigé : 1. Soit n entier $\geqslant 2$ vérifiant la condition annoncée et soit $a \in \mathbb{Z}$. D'après le théorème de la division euclidienne, on dispose d'un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times [\![0\,;\, n-1]\!]$ tel que $a = qn + r$. Dans l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$, on a

$$\bar{a}^n = \bar{r}^n = \bar{r} = \bar{a}$$

Ainsi $\qquad \boxed{\text{L'entier } n \text{ est un nombre de Carminchael.}}$

2. Pour tester si un entier $n \geqslant 2$ est un nombre de Carmichael, on commence par tester sa non primalité. S'il existe d un diviseur strict de n, alors on a $d \leqslant \sqrt{n}$ ou $\dfrac{n}{d} \leqslant n$. Sinon, on aurait $d > \sqrt{n}$ et $\dfrac{n}{d} > \sqrt{n}$ d'où $n > n$ ce qui est absurde. On saisit :

```
def carmichael(n):
    d=2
    diviseur_trouve=False
    while d**2<=n and not diviseur_trouve:
        if n%d==0:
            diviseur_trouve=True
        d+=1
```

```
    if not diviseur_trouve:
        return False
    for k in range(n):
        if (k**n)%n!=k:
            return False
    return True
```

3. On saisit :

```
n=2
while not carmichael(n):
    n+=1
print("Premier nombre de Carmichael=",n)
```

On obtient :

```
Premier nombre de Carmichael= 561
```

On peut améliorer la performance de cette fonction en procédant différemment et en gardant la mémoire des nombres premiers rencontrés au cours des itérations :

```
P=[2]

def carmichael(n):
    global P
    est_premier=True
    for p in P:
        if n%p==0:
            est_premier=False
    if est_premier:
        P.append(n)
        return False
    for k in range(n):
        if (k**n)%n!=k:
            return False
    return True
```

Puis, on saisit en démarrant à $n = 3$ (on sait que 2 n'est pas de Carmichael puisqu'il n'est pas premier) :

```
n=3
while not carmichael(n):
    n+=1
print("Premier nombre de Carmichael=",n)
```

La liste `P` est enrichie à chaque appel de la fonction `carmichael` des nouveaux nombres premiers rencontrés ce qui permet d'accélérer le test de non primalité.

4.(a) Soit $i \in [\![1 \,;\, r]\!]$ et $a \in \mathbb{Z}$. Si p_i divise a, alors p_i divise a^n et l'égalité a lieu. Supposons que p_i ne divise par a ce qui éguivaut à $a \wedge p_i = 1$. D'après le petit théorème de Fermat, on a donc

$$a^{p_i-1} \equiv 1 \ [p_i]$$

Comme $p_i - 1 | n-1$, on dispose de q_i entier non nul tel que $n - 1 = q_i(p_i - 1)$. Par suite, il vient

$$a^n \equiv (a^{p_i-1})^{q_i}\, a \equiv a \ [p_i]$$

On conclut $\boxed{\forall i \in [\![1 \,;\, r]\!] \qquad \forall a \in \mathbb{Z} \qquad a^n \equiv a \ [p_i]}$

4.(b) Les p_i sont des nombres premiers deux à deux distincts et sont donc deux à deux premiers entre eux. D'après le théorème chinois, l'application

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z} \\ \bar{a}^{[n]} \quad \longmapsto \left(\bar{a}^{[p_i]}\right)_{1 \leqslant i \leqslant r} \end{cases}$$

est un isomorphisme d'anneaux. Ainsi, pour $a \in \mathbb{Z}$, on a

$$\overline{a^n}^{[n]} = \bar{a}^{[n]} \iff \pi(\overline{a^n}^{[n]}) = \pi(\bar{a}^{[n]}) \iff \forall i \in [\![1 \,;\, r]\!] \qquad \overline{a^n}^{[p_i]} = \bar{a}^{[p_i]}$$

et comme la dernière assertion est vraie d'après le résultat de la question précédente, on conclut

$$\boxed{\text{L'entier } n \text{ est un nombre de Carmichael.}}$$

5. Supposons qu'il existe p premier et α entier $\geqslant 2$ tel que $p^\alpha | n$. Comme le nombre n est de Carmichael, on a $p^n \equiv p \ [n]$ d'où $p^n \equiv p \ [p^2]$ ce qui signifie qu'on dispose de $q \in \mathbb{Z}$ tel que $p^n = p + qp^2$ d'où

$$p(p^{n-2} - q) = 1$$

ce qui est absurde. Ainsi, les valuations des facteurs premiers dans la décomposition de n sont égales à 1 et il n'y a pas qu'un facteur premier sans quoi l'entier n serait premier. On conclut

$$\boxed{\text{Un nombre de Carmichael est produit de nombres premiers deux à deux distincts.}}$$

6.(a) On a $\qquad (xy)^{o(x)o(y)} = (x^{o(x)})^{o(y)} (y^{o(y)})^{o(x)} = 1$

d'où $o(xy) | o(x)o(y)$. Puis, on a $(xy)^{o(xy)} = 1$ d'où

$$(xy)^{o(xy)o(x)} = (x^{o(x)})^{o(xy)} y^{o(xy)o(x)} = y^{o(xy)o(y)} = 1$$

d'où $o(y) | o(xy)o(x)$ et comme $o(x) \wedge o(y) = 1$, il s'ensuit $o(y) | o(xy)$ d'après le lemme de Gauss. Par symétrie des rôles, on a également $o(x) | o(xy)$ d'où $o(x) \vee o(y) | o(xy)$. Or, on a

$$o(xy) = (o(x) \wedge o(y))(o(x) \vee o(y)) = o(x) \vee o(y)$$

Ceci prouve que $o(x)o(y) | o(x)o(y)$ et les entiers $o(xy)$ et $o(x)o(y)$ sont donc des entiers associés. On conclut

$$\boxed{o(xy) = o(x)o(y)}$$

Variante : On peut aussi observer

$$(xy)^{o(xy)} = 1 \iff \underbrace{x^{o(xy)}}_{\in \langle x \rangle} = \underbrace{y^{-o(xy)}}_{\in \langle y \rangle}$$

Or, l'intersection $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ est sous-groupe de $\langle x \rangle$ et de $\langle y \rangle$ donc d'ordre divisant $o(x)$ et $o(y)$ d'où $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = 1$. On en déduit

$$x^{o(xy)} = 1 \quad \text{et} \quad y^{o(xy)} = 1$$

d'où $o(x)|o(xy)$ et $o(y)|o(xy)$ et on conclut comme précédemment.
6.(b) Soit $x \in \mathrm{G}$ et d diviseur de $o(x)$. On dispose de c entier non nul tel que $o(x) = dc$. On a $(x^c)^d = x^{dc} = 1$ d'où $d|o(x^c)$. Puis, on a $(x^c)^{o(x^c)} = 1 = x^{co(x^c)}$ d'où $o(x)|co(x^c)$, c'est-à-dire $dc|co(x^c)$ d'où $d|o(x^c)$. Les entiers d et $o(x^c)$ sont associés donc égaux et par conséquent

$$\boxed{\text{Il existe un élément de G d'ordre } d.}$$

6.(c) La quantité $\max\{o(x), x \in \mathrm{G}\}$ est bien définie comme maximum d'une partie finie non vide. On note $m = \max\{o(x), x \in \mathrm{G}\}$ et $x \in \mathrm{G}$ tel que $o(x) = m$. Supposons qu'il existe $y \in \mathrm{G}$ tel que $o(y)$ ne divise pas $o(x)$. Ainsi, on dispose de $q \in \mathcal{P}$ tel que $v_q(o(y)) > v_q(o(x))$. D'après le résultat de la question précédente, on dispose de $x' \in \mathrm{G}$ d'ordre $\prod\limits_{p \in \mathcal{P} \smallsetminus \{q\}} p^{v_p(o(x))}$ et de $y' \in \mathrm{G}$ d'ordre $p^{v_p(o(y))}$. Or, on a

$$q^{v_q(o(y)} \wedge \prod_{p \in \mathcal{P} \smallsetminus \{q\}} p^{v_p(o(x)} = 1$$

et d'après le résultat de la question 6.(a), on obtient

$$o(x'y') = o(x')o(y') = q^{v_q(o(y))} \prod_{p \in \mathcal{P} \smallsetminus \{q\}} p^{v_p(o(x))} > o(x)$$

ce qui est absurde par maximalité de $o(x)$. On conclut

$$\boxed{\text{L'ordre de tout élément de G divise } m.}$$

6.(d) Soit $p \in \mathcal{P}$. Le groupe $(\mathrm{U}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \times)$ est d'ordre $p - 1$. Notons m l'ordre maximal des éléments de G. On a $\bar{x}^m = \bar{1}$ pour tout $\bar{x} \in \mathrm{U}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ d'après le résultat de la question précédente. Comme l'anneau $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps, le polynôme $\mathrm{X}^m - \bar{1}$ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ admet au plus m racines distinctes (résultat qui n'est pas officiellement au programme, à savoir redémontrer par récurrence sur le degré avec une factorisation de Bernoulli). Ainsi, on a $p - 1 \leqslant m$ et comme l'ordre d'un élément d'un groupe divise l'ordre du groupe, on a aussi $m|p - 1$ d'où $m \leqslant p - 1$ et par conséquent $m = p - 1$ ce qui prouve que le groupe $(\mathrm{U}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \times)$ admet un générateur. On conclut

$$\boxed{\forall p \in \mathcal{P} \qquad \mathrm{U}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}}$$

7. Pour $a \in \mathbb{Z}$, on a $a^n \equiv a\ [n]$ d'où $a^n \equiv a\ [p]$. Pour $a[\![\,1\,;\,p-1\,]\!]$, on a $\bar{a} \in \mathrm{U}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et il vient

$$\bar{a}^{n-1} = \bar{a}^{-1}\bar{a}^n = \bar{a}^{-1}\bar{a} = \bar{1}$$

Comme le groupe $(\mathrm{U}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \times)$ est cyclique, on choisit $a \in [\![\,1\,;\,p-1\,]\!]$ d'ordre égal à $p - 1$. Ainsi, on trouve

$$\boxed{o(\bar{a}) = p - 1|n - 1}$$

Commentaire : On a donc établi l'équivalence suivante :

Le nombre $n \geqslant 2$ est de Carmichael si et seulement si $n = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i$ avec $r \geqslant 2$ et les p_i des nombres premiers distincts vérifiant $p_i - 1|n - 1$ pour tout $i \in [\![\,1\,;\,r\,]\!]$.

Exercice 12 (CCINP 2024)

1. Soit $(u_n)_n$ suite décroissante positive de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.
   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum(-1)^n u_n$.

2. On pose
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx}}{n}$$
   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.
   (b) Étudier la convergence uniforme sur $[\,0\,;+\infty\,[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

Corrigé : Exercice 8 CCPINP 2024

Exercice 13 (CCINP 2024)

Soit n entier non nul. On pose

$$\forall (\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \langle \mathrm{M},\mathrm{N}\rangle = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}^\top \mathrm{N}\right)$$

1. Montrer que $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \mapsto \langle \mathrm{M},\mathrm{N}\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Pour $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$, établir $\langle \mathrm{M},\mathrm{N}\rangle \leqslant n$.
3. Pour $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2$, montrer $\mathrm{Tr}\,((\mathrm{AB})^2) \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2)$.
4. Pour $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2$, montrer $\mathrm{Tr}\left((\mathrm{AB}+\mathrm{BA})^2\right) \leqslant 4\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2)\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}^2)$.

Corrigé : 1. Pour $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\mathrm{B} = \left(b_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a'_{j,i}b_{i,j}$ avec $\mathrm{A}^\top = \left(a'_{i,j}\right)$. D'où

$$\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}$$

expression symétrique en les coefficients d'où la symétrie de l'application. On en déduit sans difficulté qu'il s'agit d'une forme bilinéaire symétrique définie et positive et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } (\mathrm{M},\mathrm{N}) \mapsto \langle \mathrm{M},\mathrm{N}\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2. Soit $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\langle \mathrm{M},\mathrm{N}\rangle \leqslant \|\mathrm{M}\|\|\mathrm{N}\|$$

avec
$$\|\mathrm{M}\|^2 = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\right) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{I}_n) = n$$

et de même pour N. On conclut

$$\boxed{\forall (\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \langle \mathrm{M},\mathrm{N}\rangle \leqslant n}$$

3. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2$. On pose $\mathrm{C} = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}$. On observe $\mathrm{C} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \smallsetminus \{0\}$ tel que $\mathrm{CX} = \lambda\mathrm{X}$. On multiplie par $\bar{\mathrm{X}}^\top$ à gauche et on trouve $\bar{\mathrm{X}}^\top\mathrm{CX} = \lambda\bar{\mathrm{X}}^\top\mathrm{X}$. Puis, on conjugue et transpose l'égalité $\mathrm{CX} = \lambda\mathrm{X}$ et on multiplie à droite par X pour obtenir $-\bar{\mathrm{X}}^\top\mathrm{CX} = \bar{\lambda}\bar{\mathrm{X}}^\top\mathrm{X}$. En additionnant les deux égalités obtenues, il vient

$$(\lambda+\bar{\lambda})\bar{\mathrm{X}}^\top\mathrm{X} = (\lambda+\bar{\lambda})\underbrace{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}_{>0} = 0$$

notant x_i les coordonnées de X dont l'une au moins n'est pas nulle. On en déduit $\lambda+\bar{\lambda} = 0$ d'où $\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}$. La matrice C^2 est clairement symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral et $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{C}^2) \subset\,]-\infty\,;0]$ d'après ce qui précède. Il s'ensuit $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{C}^2) \leqslant 0$, autrement dit

$$\mathrm{Tr}\,((\mathrm{AB})^2 - 2\mathrm{AB}^2\mathrm{A} + (\mathrm{BA})^2) = \mathrm{Tr}\,((\mathrm{AB})^2) - 2\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}^2\mathrm{A}) + \mathrm{Tr}\,((\mathrm{BA})^2) \leqslant 0$$

D'après la propriété fondamentale de la trace, on a $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}^2\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2)$ et par invariance de la transposition $\mathrm{Tr}\,((\mathrm{BA})^2) = \mathrm{Tr}\,((\mathrm{AB})^2)$. On conclut

$$\boxed{\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \mathrm{Tr}\,((\mathrm{AB})^2) \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2)}$$

4. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. En utilisant les propriétés de la trace mentionnées ci-avant, il vient

$$\mathrm{Tr}\,((\mathrm{AB}+\mathrm{BA})^2) = \mathrm{Tr}\,((\mathrm{AB})^2 + 2\mathrm{AB}^2\mathrm{A} + (\mathrm{BA})^2) = 2\,\mathrm{Tr}\,((\mathrm{AB})^2) + 2\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2)$$

et avec l'inégalité précédente, il vient

$$\mathrm{Tr}\left((\mathrm{AB}+\mathrm{BA})^2\right) \leqslant 4\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2) = \langle \mathrm{A}^2, \mathrm{B}^2 \rangle \leqslant \|\mathrm{A}^2\|\|\mathrm{B}^2\|$$

On dispose de $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{P}^\top \mathrm{AP} = \mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ d'où $\mathrm{A}^2 = \mathrm{PD}^2\mathrm{P}^\top$ et $\mathrm{A}^4 = \mathrm{PD}^4\mathrm{P}^\top$. Ainsi

$$\|\mathrm{A}^2\|^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^4) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^4 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right)^2$$

ce qui prouve $$\|\mathrm{A}^2\| \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2)$$

et de même pour B. On conclut

$$\boxed{\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \mathrm{Tr}\,\left((\mathrm{AB} + \mathrm{BA})^2\right) \leqslant 4\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2)\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}^2)}$$

Exercice 14 (Mines-Telecom 2023)

On pose
$$\forall n \geqslant 2 \qquad u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$$

1. Établir
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^2}{2}$$

2. Déterminer un équivalent de $u_n - \dfrac{\ln(n)^2}{2}$ lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. On a
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{\ln(k)}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln(k+1)}{k}$$

d'où
$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(k)}{k}$$

Par sommation des relations de comparaison, il vient
$$\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{(\ln(n+1))^2}{2}$$

Ainsi
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^2}{2}}$$

2. On pose
$$\forall x \geqslant 1 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

La fonction F est primitive d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et est donc elle-même de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Par dérivation, on trouve
$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \frac{\ln(x)}{x} \qquad \mathrm{F}''(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

Soit $k \geqslant 1$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on obtient
$$|\mathrm{F}(k+1) - \mathrm{F}(k) - \mathrm{F}'(k)| \leqslant \frac{1}{2}\|\mathrm{F}^{(2)}\|_{\infty,[\,k\,;k+1\,]}$$

avec
$$\|\mathrm{F}^{(2)}\|_{\infty,[\,k\,;k+1\,]} \leqslant \frac{\ln(k+1)+1}{k^2} \underset{k\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{\ln(k)}{k^2}\right) \underset{k\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Puis, il vient pour n entier non nul
$$\sum_{k=1}^{n} (\mathrm{F}(k+1) - \mathrm{F}(k) - \mathrm{F}'(k)) = \mathrm{F}(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{F}'(k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Par critère de Riemann, il existe λ réel tel que
$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{F}'(k) - \mathrm{F}(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$$

c'est-à-dire
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \int_1^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \lambda + \mathrm{o}(1)$$

ou encore
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \left[\frac{\ln(t)^2}{2}\right]_1^{n+1} = \lambda + \mathrm{o}(1)$$

On a $$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où $$\ln(n+1)^2 = \ln(n)^2 + \mathrm{o}(1)$$

On conclut $$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln(n)^2}{2} + \lambda + \mathrm{o}(1)}$$

Remarque : La constante λ ne semble pas simple à déterminer ... Elle porte un nom : on l'appelle *constante de Stieljes.*

Exercice 15 (Mines-Telecom 2023)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose $\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n = 0$. Montrer que l'entier n est pair.
2. On suppose $\mathrm{A}^3 + \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A})$ est pair.

Corrigé : 1. Le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$ est annulateur de A. Si l'entier n est impair, alors on a pour x réel

$$\chi_{\mathrm{A}}(x) = x^n + \mathrm{o}(x^n) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \pm\infty$$

et comme l'application polynomiale $x \mapsto \chi_{\mathrm{A}}(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'elle admet une racine. Or, les valeurs propres de A, c'est-à-dire les racines de χ_{A} sont contenues dans $\mathrm{P}^{-1}(\{0\}) \cap \mathbb{R}$ qui est vide. On conclut

$$\boxed{\text{L'entier } n \text{ est pair.}}$$

2. On note $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à A. L'image $\mathrm{Im}\, u$ est stable par u et on note $v = u_{\mathrm{Im}\, u}$ l'induit par u sur $\mathrm{Im}\, u$. Soit $x \in \mathrm{Im}\, u$. On dispose de $t \in \mathrm{E}$ tel que $x = u(t)$ et il vient

$$(v^2 + v + \mathrm{id}\,)(x) = (u^2 + u + \mathrm{id}\,)(u(t)) = (u^3 + u^2 + u)(t) = 0_{\mathrm{E}}$$

On applique alors le résultat de la première question à l'endomorphisme v et on conclut

$$\boxed{\text{L'entier } \mathrm{rg}\,(u) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) \text{ est pair.}}$$

Exercice 16 (Centrale 2017)

On note r_n la probabilité que deux nombres aléatoires dans $[\![1\,;\, n]\!]$ soient premiers entre eux.

On souhaite montrer
$$r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{6}{\pi^2}$$

On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et la *formule du crible* :

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{U}_i\right) = \sum_{\mathrm{I}\subset[\![1\,;\, k]\!],\mathrm{I}\neq\varnothing} (-1)^{1+\operatorname{Card}\mathrm{I}} \operatorname{Card}\left(\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{U}_i\right)$$

On définit la fonction μ de *Möbius* de $\mathbb{N}^*$ dans $\{-1,0,1\}$ de la manière suivante : $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ si n est divisible par le carré d'un nombre premier et $\mu(n) = (-1)^r$ si n est le produit de r nombres premiers distincts. Pour n entier non nul, on note

$$\mathrm{A}_n = \{(a,b) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \quad | \quad a \wedge b = 1\}$$

Notant $p_1, \ldots, p_k$ les nombres premiers dans $[\![1\,;\, n]\!]$, on pose

$$\forall i \in [\![1\,;\, k]\!] \qquad \mathrm{U}_i = \{(a,b) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \quad | \quad p_i|a \quad \text{et} \quad p_i|b\}$$

1. Écrire une fonction `pgcd(a,b)` d'arguments des entiers a, b et qui renvoie le pgcd $a \wedge b$.
2. Vérifier la conjecture sur la limite de $(r_n)_n$.
3. Exprimer A_n en fonction des U_i.
4. Soit ℓ entier non nul. Déterminer le nombre de multiples de ℓ dans $[\![1\,;\, n]\!]$.
5. En déduire le cardinal de $\bigcap\limits_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{U}_i$ avec I une partie non vide de $[\![1\,;\, k]\!]$.
6. Montrer
$$\operatorname{Card}(\mathrm{A}_n) = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$$
7. Conclure.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def pgcd(a,b):
    u,v=a,b
    while v!=0:
        u,v=v,u%v
    return u
```

2. Pour n entier non nul, soient $\mathrm{X}_1^{(n)}, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}^{(n)}, \mathrm{Y}_1^{(n)}, \ldots, \mathrm{Y}_\mathrm{N}^{(n)}$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme $\mathscr{U}_{[\![1\,;\, n]\!]}$. On implémente une méthode de *Monte-Carlo* avec l'estimation

$$\frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathbb{1}_{\mathrm{X}_i^{(n)} \wedge \mathrm{Y}_i^{(n)} = 1} \simeq \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathrm{X}_1^{(n)} \wedge \mathrm{Y}_1^{(n)} = 1}\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{X}_1^{(n)} \wedge \mathrm{Y}_1^{(n)} = 1\right) = r_n$$

On saisit :

```
tr=[]
tn=range(2,100)
for n in tn:
    X=rd.randint(1,n,N)
    Y=rd.randint(1,n,N)
    res=0
    for k in range(N):
        res+=pgcd(X[k],Y[k])==1
    res/=N
    tr.append(res)
plt.plot(tn,tr)
plt.grid();plt.show()
```

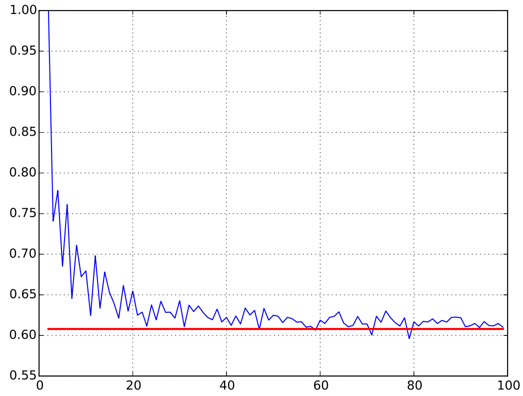

FIGURE 4 – Approximation stochastique de $(r_n)_n$

3. Un couple d'entiers de $[\![1\,;\, n]\!]^2$ n'est pas dans A_n si et seulement s'il existe un facteur premier commun à ces deux entiers, autrement dit

$$[\![1\,;\, n]\!]^2 \smallsetminus \mathrm{A}_n = \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{U}_i$$

Et on conclut $$\boxed{\mathrm{A}_n = [\![1\,;\, n]\!]^2 \smallsetminus \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{U}_i}$$

4. Les multiples de ℓ dans $[\![1\,;\, n]\!]$ sont ℓ, 2ℓ, ..., $\left\lfloor \dfrac{n}{\ell} \right\rfloor \ell$ et par suite

$$\boxed{\text{Il y a } \left\lfloor \frac{n}{\ell} \right\rfloor \text{ multiples de } \ell \text{ dans } [\![1\,;\, n]\!].}$$

5. Les éléments de $\bigcap\limits_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{U}_i$ sont les couples de multiples dans $[\![1\,;\, n]\!]^2$ de $\prod\limits_{i\in\mathrm{I}} p_i$ d'où

$$\boxed{\mathrm{Card}\left(\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{U}_i\right) = \left\lfloor \frac{n}{\prod\limits_{i\in\mathrm{I}} p_i} \right\rfloor^2}$$

6. Avec la formule du crible, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}\ \mathrm{A}_n &= n^2 - \mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{U}_i\right) \\
&= n^2 - \sum_{\mathrm{I}\subset[\![1\,;\, k]\!],\mathrm{I}\neq\varnothing} (-1)^{\mathrm{Card}\ \mathrm{I}+1}\ \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{U}_i\right) \\
\mathrm{Card}\ \mathrm{A}_n &= n^2 - \sum_{\mathrm{I}\subset[\![1\,;\, k]\!],\mathrm{I}\neq\varnothing} (-1)^{\mathrm{Card}\ \mathrm{I}+1} \left\lfloor \frac{n}{\prod\limits_{i\in\mathrm{I}} p_i} \right\rfloor^2
\end{aligned}$$

Choisir $\mathrm{I} \neq \varnothing$ dans la somme précédente équivaut, par unicité de la décomposition en facteurs premiers, à choisir $d \in [\![2\,;\, n]\!]$ produit de facteurs premiers distincts. Un tel d est donc $\geqslant 2$.

L'utilisation de la fonction μ permet d'écrire une somme pour $d \in [\![2\,;\, n]\!]$, celle-ci étant complétée par des zéros dans le cas où d possède un facteur premier au carré. Ainsi, on trouve

$$\mathrm{Card}\ \mathrm{A}_n = n^2 + \sum_{d=2}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$$

Et finalement
$$\boxed{\mathrm{Card}\ \mathrm{A}_n = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2}$$

7. On a
$$\forall n \geqslant 1 \qquad r_n = \frac{\mathrm{Card}\ \mathrm{A}_n}{\mathrm{Card}\,[\![1\,;\, n]\!]^2} = \frac{\mathrm{Card}\ \mathrm{A}_n}{n^2}$$

Avec l'encadrement $x - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$ pour x réel, il vient

$$\left(\frac{n}{d} - 1\right)^2 \leqslant \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \leqslant \left(\frac{n}{d}\right)^2$$

puis
$$\sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} - \frac{2}{n} \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d} + \frac{1}{n} \leqslant r_n \leqslant \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$$

On a $|\mu(d)| \leqslant 1$ pour tout d entier et par comparaison série/intégrale, on obtient $\sum\limits_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d} = \mathrm{O}(\ln n)$ et par suite

$$r_n = \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} + \mathrm{o}(1)$$

Les familles $\left(\frac{\mu(d)}{d^2}\right)_{d \geqslant 1}$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geqslant 1}$ sont sommables et d'après le théorème de Fubini, la famille $\left(\frac{\mu(d)}{(dn)^2}\right)_{(d,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. En considérant la partition $(\mathrm{I}_p)_{p \geqslant 1}$ avec

$$\forall p \geqslant 1 \qquad \mathrm{I}_p = \left\{(d,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad | \quad dn = p\right\}$$

il vient après sommation par paquets

$$\sum_{(d,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{\mu(d)}{(dn)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{dn=p} \frac{\mu(d)}{(dn)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \left(\sum_{d|p} \mu(d) \right)$$

Évaluons enfin $\sum\limits_{d|n} \mu(d)$ pour n entier non nul. Les facteurs premiers de n sont $p_1, \ldots, p_k$. Comme la fonction μ s'annule en présence d'un facteur premier au carré, il vient

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{\mathrm{I} \subset [\![1\,;\, k]\!]} \mu\left(\prod_{i \in \mathrm{I}} p_i\right) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{\mathrm{I} \subset [\![1\,;\, k]\!], \mathrm{Card}\ \mathrm{I} = j} \mu\left(\prod_{i \in \mathrm{I}} p_i\right) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j = (1-1)^k$$

et par conséquent
$$\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{n,1}$$

d'où
$$\frac{\pi^2}{6} \left(\lim_{n \to +\infty} r_n\right) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right) \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}\right) = \sum_{(d,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{\mu(d)}{(dn)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\delta_{p,1}}{p^2} = 1$$

On conclut
$$\boxed{r_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{6}{\pi^2}}$$

Exercice 17 (Mines 2019)

1. Soit $n \geqslant 2$. Trouver les $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que, pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, la matrice $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ soit aussi antisymétrique.
2. Soit $n \geqslant 2$. Trouver les $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que, pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, la matrice $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ soit aussi orthogonale.

Corrigé : 1. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ telle que $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$. En conjuguant puis multipliant par $\mathrm{X}^\top$ à gauche, on obtient

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{A}\bar{\mathrm{X}} = \bar{\lambda}\mathrm{X}^\top\bar{\mathrm{X}}$$

Puis, si on transpose l'égalité $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$ et qu'on multiplie à droite par $\bar{\mathrm{X}}$, il vient

$$-\mathrm{X}^\top\mathrm{A}\bar{\mathrm{X}} = \lambda\mathrm{X}^\top\bar{\mathrm{X}}$$

Et en sommant ces deux égalités il vient

$$(\lambda + \bar{\lambda})\mathrm{X}^\top\bar{\mathrm{X}} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathrm{X}^\top\bar{\mathrm{X}} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$$

On en déduit $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \subset \mathrm{i}\mathbb{R}$. En considérant la matrice $\mathrm{diag}(\alpha\mathrm{R}(\pi/2), 0, \ldots, 0)$ avec α réel, on en déduit que $\mathrm{i}\alpha$ peut être valeur propre d'une matrice antisymétrique et donc tout imaginaire pur est valeur propre d'une matrice antisymétrique. Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\mathrm{X}^k$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{M}) \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ pour tout matrice M antisymétrique. Avec α réel et $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{i}\alpha \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$, il vient

$$\mathrm{P}(\mathrm{i}\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k}(-1)^k\alpha^{2k} + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}(-1)^k\alpha^{2k+1}$$

Comme $\mathrm{P}(\mathrm{i}\alpha) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{P}(\mathrm{A}))$, il s'ensuit que $\mathrm{P}(\mathrm{i}\alpha) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ ce qui prouve que le polynôme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k}(-1)^{2k}\mathrm{X}^{2k}$ admet α comme racine et ceci pour tout α réel ce qui signifie donc une infinité de racines et par conséquent la nullité de $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k}(-1)^{2k}\mathrm{X}^{2k}$. On en déduit que le polynôme P est impair et la réciproque est immédiate par transposition. On conclut

$$\boxed{\text{Les polynômes impairs sont les polynômes } \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \text{ vérifiant } \mathrm{P}(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})) \subset \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).}$$

2. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$. En conjuguant puis transposant, on a $\bar{\mathrm{X}}^\top\mathrm{A}^\top = \bar{\lambda}\bar{\mathrm{X}}^\top$ puis

$$\bar{\mathrm{X}}^\top\mathrm{A}^\top\mathrm{AX} = \bar{\lambda}\lambda\bar{\mathrm{X}}^\top\mathrm{X} \quad \text{et} \quad \bar{\mathrm{X}}^\top\mathrm{A}^\top\mathrm{AX} = \bar{\mathrm{X}}^\top\mathrm{X} \quad \text{avec} \quad \bar{\mathrm{X}}^\top\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$$

d'où $|\lambda|^2 = 1$. Autrement dit, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) \subset \mathbb{U}$. En considérant la matrice $\mathrm{diag}(\mathrm{R}(\theta), \mathrm{I}_{n-2})$ avec θ réel, on en déduit que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est valeur propre d'une matrice orthogonale et donc tout élément de $\mathbb{U}$ est valeur propre d'une matrice orthogonale. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{M})$ soit orthogonale pour toute matrice M orthogonale. Pour $z \in \mathbb{U}$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $z \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A})$, il vient $\mathrm{P}(z) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{P}(\mathrm{A}))$ d'où $\mathrm{P}(z) \in \mathbb{U}$ et par conséquent $\mathrm{P}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. Soit $d = \deg \mathrm{P}$. On a

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) = 1$$

d'où
$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}d\theta}\mathrm{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}d\theta}$$

ce qui prouve que le polynôme $\mathrm{P} - \mathrm{X}^d\mathrm{P}(1/\mathrm{X}) - \mathrm{X}^d$ admet une infinité de racines et est donc le polynôme nul. On en déduit que P divise X^d et comme $d = \deg \mathrm{P}$, il vient $\mathrm{P} = \pm\mathrm{X}^d$. La réciproque est immédiate et on conclut

$$\boxed{\text{Les polynômes } \pm\mathrm{X}^d \text{ sont les polynômes } \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \text{ vérifiant } \mathrm{P}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).}$$

Exercice 18 (Mines 2016)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels définis par $u_1 > 0$ et

$$\forall n \geqslant 1 \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$$

avec $\alpha > 0$.

1. Discuter de la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ en fonction de α.
2. Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente de limite ℓ, déterminer un équivalent simple de $u_n - \ell$ pour $n \to +\infty$.
3. Préciser une équivalent simple de u_n pour $n \to +\infty$ si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ diverge.

Corrigé : 1. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est clairement à termes positifs et clairement croissante. On a

$$\forall n \geqslant 1 \qquad u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{2}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha} u_n^2}$$

d'où

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^\alpha}$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est de même nature que la suite $(u_n^2)_{n\geqslant 1}$ qui est de même nature que la série téléscopique $\sum \left[u_{n+1}^2 - u_n^2\right]$ d'où, par critère de Riemann

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$$

2. Supposons $\alpha > 1$. Par sommation des relations de comparaison, on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \left[u_{k+1}^2 - u_k^2\right] = \ell^2 - u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{2}{k^\alpha}$$

Par comparaison série/intégrale, on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{2}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{2}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

et

$$\ell^2 - u_n^2 = (\ell - u_n)(\ell + u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ell(\ell - u_n)$$

D'où

$$\boxed{u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(1-\alpha)\ell n^{\alpha-1}}}$$

3. Pour $\alpha \in \left]0\,;1\right]$, on a par sommation des relations de comparaison et comparaison série/intégrale

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[u_{k+1}^2 - u_k^2\right] = u_n^2 - u_1^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

On conclut

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{1-\alpha}}\, n^{\frac{1-\alpha}{2}} \quad \text{si} \quad \alpha \in \left]0\,;1\right[\quad \text{et} \quad \sqrt{2\ln n} \quad \text{si} \quad \alpha = 1}$$