Oraux blancs semaine 4

Centrale 2 : convergence d'une suite

Pour $a > 1$, on définit la suite (u_n) suivante par les conditions :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{\ln u_n}}$$

1) `[PY]` Ecrire une fonction qui a pour paramètre a et n et qui renvoie la liste des $n+1$ éléments : $\left(\frac{u_0}{1}, \frac{u_1}{2} \cdot \ln\sqrt{u_1}, \dots, \frac{u_n}{n+1} \cdot \ln\sqrt{u_n}\right)$.

Pour $a = 2$, donner $\frac{u_{200}}{201} \cdot \ln\sqrt{u_{200}}$

2) `[PY]` Tracer pour $n = 100$ et $a = 2$:

$$\left(k, \frac{u_k}{k+1} \cdot \ln\sqrt{u_k}\right), k \in \{0, 1, \dots, 100\}$$

Que conjecturer ?

3) Montrer que (u_n) est bien définie et tend vers $+\infty$.

4) Montrer que pour $y > x > 1$ on a :

$$\sqrt{\ln y} - \sqrt{\ln x} \leqslant \frac{y - x}{2x\sqrt{\ln x}}$$

5) En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $u_n\left(\sqrt{\ln u_{n+1}} - \sqrt{\ln u_n}\right)$

6) On pose pour $n \in \mathbb{N},\ b_n = u_n\sqrt{\ln u_n}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1} - b_n) = 1$

7) En déduire un équivalent de (b_n).

8) Trouver un équivalent de $\ln u_n$ puis de u_n.

9) A quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ la série de terme général $a_n = \frac{1}{u_n \ln n^\alpha}$ converge-t-elle ?

10) `[PY]` On appelle $u_n^{(a)}$ la suite définie par $u_0 = a$ et la relation de récurrence de l'énoncé.

Pour $a \in \{2, 4, 6, \dots, 40\}$ et $k \in \{0, \dots 100\}$, tracer les $u_k^{(a)}$.

Centrale 1 : Groupe de matrices

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) / M \text{ et } M^{-1} \text{ sont à coefficients dans } \mathbb{Z}\}$

1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers, montrer que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\det M| = 1$. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que $M^d = I_n$. On pose $A = \frac{1}{3}(M - I_n)$. Étudier la convergence de la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

3) Montrer qu'il existe un entier K_n majorant le cardinal des sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Centrale 2 : Matrice de rotation

Si $\theta \in \mathbb{R}$, on note :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Pour $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de M.
On note $\mathrm{Conv}(z_1, \ldots, z_n)$ le plus petit convexe contenant $z_1, \ldots, z_n$.
Pour $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on note $H(M) = \{{}^t\overline{z}Mz,\ z \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}) : {}^t\overline{z}z = 1\}$.

1. On note n un entier naturel. Soit $(z_1, \ldots, z_n)$ une famille de n complexes, et z la matrice colonne associée.
Exprimer ${}^t\overline{z}z$ en fonction des modules des z_i.

2. Question `Python`

a) Écrire une fonction qui prend θ pour paramètre et renvoie $R(\theta)$.

b) Écrire une fonction renvoyant une matrice colonne aléatoire de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ telle que ${}^t\overline{z}z = 1$.
Produire 1000 de ces matrices, et émettre une conjecture sur $H(R)$. On pourra utiliser la fonction `scatter` pour créer un nuage de points.

3. Quelles sont les valeurs propres complexes de $R(\theta)$?

4. Démontrer l'existence d'une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ propre pour R telle que ${}^t\overline{e_i}e_j = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

5. Montrer que $\mathrm{Conv}(z_1, \ldots, z_n) = \{\sum_{i=1}^n x_i z_i : x_i \geqslant 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$

6. Prouver la conjecture émise grâce au programme `Python`.

CCINP : Intégrales

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

On note $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer une équation différentielle vérifiée par f.

3) Calculer f à l'aide de fonctions usuelles.

► *On admet que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Corrections Centrale maths 2 :