Préparation à l'oral - Feuille n°7

Exercice 1 (CCINP 2024)

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de f différentiable en $(0,0)$.

2. On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé : Exercice 57 CCPINP 2024

Exercice 2 (CCINP 2024)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer $\qquad \mathrm{E} = \mathrm{Im}\ f \oplus \mathrm{Ker}\ f \implies \mathrm{Im}\ f = \mathrm{Im}\ f^2$

2. (a) Montrer $\qquad \mathrm{Im}\ f = \mathrm{Im}\ f^2 \iff \mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Ker}\ f^2$
   (b) Montrer $\qquad \mathrm{Im}\ f = \mathrm{Im}\ f^2 \implies \mathrm{E} = \mathrm{Im}\ f \oplus \mathrm{Ker}\ f$

Corrigé : Exercice 64 CCPINP 2024

Exercice 3 (CCINP 2024)

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit $(\mathrm{Y}_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi ayant un moment d'ordre 2. On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k$ pour n entier. Montrer
$$\forall a > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{Y}_1)}{na^2}$$
3. Application : on effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprises entre 0.35 et 0.45 ?

Corrigé : Exercice 99 CCINP 2024

Exercice 4 (Mines-Telecom 2024)

Soit $n > 2$ entier et $\mathrm{A} = \big(\sin(i+j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A})$ et $\det(\mathrm{A})$. On pourra considérer les colonnes $\mathrm{U} = \big(\cos(i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $\mathrm{V} = \big(\sin(i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Corrigé : On a $\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad \sin(i+j) = \sin(i)\cos(j) + \sin(j)\cos(i)$

d'où
$$\mathrm{A} = \mathrm{U}\mathrm{V}^\top + \mathrm{V}\mathrm{U}^\top$$

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Il vient

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{AX} = \langle \mathrm{V}, \mathrm{X}\rangle\, \mathrm{U} + \langle \mathrm{U}, \mathrm{X}\rangle\, \mathrm{V} \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}, \mathrm{V})$$

d'où $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) \leqslant 2$. La famille (U, V) est libre. En effet, si on considère le déterminant extrait sur les deux premières lignes de la matrice $(\mathrm{U}|\mathrm{V})$, on obtient

$$\begin{vmatrix} \cos(1) & \sin(1) \\ \cos(2) & \sin(2) \end{vmatrix} = \cos(1)\sin(2) - \sin(1)\cos(2) = \sin(1) \neq 0$$

puisque $1 \in \,]\,0\,;\pi\,[$. On en déduit

$$\mathrm{AX} = 0 \iff \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}, \mathrm{V})^\perp$$

ce qui prouve $\mathrm{Ker}\ \mathrm{A} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}, \mathrm{V})^\perp$. Or, on a $\mathbb{R}^n = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}, \mathrm{V}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U}, \mathrm{V})^\perp$ et on en déduit avec le théorème du rang

$$\boxed{\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = 2 \quad \text{et} \quad \det(\mathrm{A}) = 0}$$

Exercice 5 (Mines 2024)

Déterminer $\mathrm{T}_{\mathrm{I}_n}\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{T}_{\mathrm{I}_n}\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé : Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, \mathrm{M} \mapsto \det(\mathrm{M})$. L'application det est polynomiale en les coefficients de la matrice d'où $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{E}, \mathbb{R})$. On a

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad \frac{1}{t}\left[\det(\mathrm{I}_n + t\mathrm{E}_{i,j}) - \det \mathrm{I}_n\right] \xrightarrow[t\to 0]{} \delta_{i,j} = \mathrm{d}f(\mathrm{I}_n)\cdot \mathrm{E}_{i,j}$$

D'où, par linéarité de $\mathrm{d}f(\mathrm{I}_n)$

$$\forall \mathrm{H} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{d}f(\mathrm{I}_n)\cdot \mathrm{H} = \mathrm{d}f(\mathrm{I}_n)\cdot \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} h_{i,j}\mathrm{E}_{i,j}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \delta_{i,j}h_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} h_{i,i} = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{H})$$

c'est-à-dire $\mathrm{d}f(\mathrm{I}_n) = \mathrm{Tr}$. On a $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{1\})$ avec $\mathrm{I}_n \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{d}f(\mathrm{I}_n) \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{R})}$. Il s'ensuit

$$\boxed{\mathrm{T}_{\mathrm{I}_n}\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}f(\mathrm{I}_n) = \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}}$$

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{T}_{\mathrm{I}_n}\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On dispose de φ définie sur I un voisinage de zéro, dérivable en 0 et à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ avec $\varphi(0) = \mathrm{I}_n$ et $\varphi'(0) = \mathrm{A}$. On a

$$\forall s \in \mathrm{I} \qquad \varphi(s)^\top \varphi(s) = \mathrm{I}_n$$

puis
$$\varphi'(0)^\top \varphi(0) + \varphi(0)^\top \varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)^\top \varphi(t) - \mathrm{I}_n}{t - 0} = 0$$

autrement dit
$$\mathrm{A}^\top + \mathrm{A} = 0$$

ce qui prouve $\mathrm{T}_{\mathrm{I}_n}\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Réciproquement, pour $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(s) = \mathrm{e}^{s\mathrm{A}}$ pour tout t réel. On a

$$\forall s \in \mathbb{R} \qquad \varphi(s)^\top \varphi(s) = \mathrm{e}^{s\mathrm{A}^\top} \mathrm{e}^{s\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{-s\mathrm{A}} \mathrm{e}^{s\mathrm{A}} = \left(\mathrm{e}^{s\mathrm{A}}\right)^{-1} \mathrm{e}^{s\mathrm{A}} = \mathrm{I}_n$$

et la fonction φ est dérivable avec

$$\forall s \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(s) = \mathrm{A}\mathrm{e}^{s\mathrm{A}}$$

d'où $\varphi'(0) = \mathrm{A}$ ce qui prouve $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{T}_{\mathrm{I}_n}\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{T}_{\mathrm{I}_n}\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})}$$

Exercice 6 (Mines 2024)

Soit x solution non nulle sur $]\,0\,;+\infty\,[$ de l'équation différentielle

$$tx'' + x' + tx = 0$$

1. On pose $u(t) = \sqrt{t}x(t)$ pour $t > 0$. Déterminer une équation différentielle dont u est solution.
2. Montrer $$\int_a^b \frac{u(t)v(t)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = (uv' - u'v)(b) - (uv' - u'v)(a)$$ avec $b > a > 0$ et v solution de $v'' + v = 0$.
3. Montrer que pour tout $a > 0$, il existe $t_a \in \,]\,a\,; a + \pi\,[$ tel que $x(t_a) = 0$.
4. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{4^n (n!)^2}$ s'annule une infinité de fois.

Corrigé : 1. On a $$\forall t > 0 \qquad x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}u(t)$$

La fonction u est deux fois dérivable comme produit de fonctions deux fois dérivables sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Par dérivation, il vient pour $t > 0$

$$x'(t) = -\frac{1}{2}\frac{1}{t\sqrt{t}}u(t) + \frac{1}{\sqrt{t}}u'(t)$$

et $$x''(t) = \frac{3}{4}\frac{1}{t^2\sqrt{t}}u(t) - \frac{1}{t\sqrt{t}}u'(t) + \frac{1}{\sqrt{t}}u''(t)$$

et on trouve $$\begin{aligned} tx''(t) + x'(t) + tx(t) &= \sqrt{t}u''(t) + \left(\frac{1}{4}\frac{1}{t\sqrt{t}} + \sqrt{t}\right)u(t) \\ &= \sqrt{t}\left(u''(t) + \left(1 + \frac{1}{4t^2}\right)u(t)\right) \end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{u'' + \left(1 + \frac{1}{4t^2}\right)u = 0}$$

2. Soient $b > a > 0$. D'après ce qui précède, on a

$$\forall t > 0 \qquad \frac{u(t)}{4t^2} = -(u + u'')(t)$$

Il vient en intégrant par parties

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{u(t)v(t)}{4t^2}\,\mathrm{d}t &= -\int_a^b (u''(t) + u(t))\,v(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b u''(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [-u'(t)v(t)]_a^b + \int_a^b u'(t)v'(t)\,\mathrm{d}t + [u(t)v'(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'où $$\boxed{\int_a^b \frac{u(t)v(t)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = (uv' - u'v)(b) - (uv' - u'v)(a)}$$

3. Soit $a > 0$. On pose $$\forall t > 0 \qquad v(t) = \sin(t - a)$$

La fonction v est deux fois dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ avec $v'' + v = 0$ et les valeurs a et $a + \pi$ sont deux zéros consécutifs de v. Supposons que u ne s'annule pas sur $]\,a\,;a+\pi\,[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction u est de signe constant sur $]\,a\,;a+\pi\,[$. On peut supposer $u(t) > 0$ pour tout $t \in\,]\,a\,;a+\pi\,[$. Par continuité, on a $u(a) \geqslant 0$ et $u(a+\pi) \geqslant 0$ et par dérivation
$$\forall t > 0 \qquad v'(t) = \cos(t - a)$$

Ainsi $$\begin{aligned}\int_a^{a+\pi} \frac{u(t)v(t)}{4t^2}\,\mathrm{d}t &= (uv' - u'v)(a+\pi) - (uv' - u'v)(a)\\ &= -u(a+\pi) - u(a) \leqslant 0\end{aligned}$$

Or, l'intégrande $t \mapsto \dfrac{u(t)v(t)}{4t^2}$ est continue positif non nul d'où par séparation
$$\int_a^{a+\pi} \frac{u(t)v(t)}{4t^2}\,\mathrm{d}t > 0$$
ce qui contredit ce qui précède. On en déduit que la fonction u s'annule sur $]\,a\,;a+\pi\,[$ et de même pour x. On conclut

$$\boxed{\text{Pour tout } a > 0\text{, il existe } t_a \in\,]\,a\,;a+\pi\,[\text{ tel que } x(t_a) = 0.}$$

4. Soit $r > 0$. On pose $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{r^{2n}}{4^n(n!)^2}$$

On a $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r^2}{4(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge absolument d'où $\mathrm{R} \geqslant r$ et ceci vaut pour tout $r > 0$ d'où $\mathrm{R} = +\infty$. Par dérivation de séries entières, on a
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n\frac{(-1)^n t^{2n-1}}{4^n(n!)^2} \qquad f''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1)\frac{(-1)^n t^{2(n-1)}}{4^n(n!)^2}$$

Après changement d'indice et linéarité du symbole somme, on obtient
$$\begin{aligned} tf''(t) + f'(t) + tf(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1)\frac{(-1)^n t^{2n-1}}{4^n(n!)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n\frac{(-1)^n t^{2n-1}}{4^n(n!)^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{4^{n-1}((n-1)!)^2}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n-1}(n-1)!}\left[\frac{2n(2n-1)}{4n^2} + \frac{2n}{4n^2} - 1\right] t^{2n-1} = 0\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est solution de l'équation différentielle étudiée et d'après le résultat de la question 3, elle s'annule sur $]\,k\,;k+\pi\,[$ pour tout k entier. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ s'annule une infinité de fois.}}$$

Exercice 7 (Centrale 2024)

Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R}) \mid f^2 \in \mathrm{L}^1([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})\}$.

1. (a) Définir la notion de fonction intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

(b) Soit $(f,g) \in \mathrm{E}^2$. Montrer que le produit fg est intégrable et en déduire que l'ensemble E est un $\mathbb{R}$-ev.

On pose $$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f,g \rangle = \int_0^{+\infty} fg$$

2. (a) Montrer que $(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle$ est un produit scalaire sur E.
Soit $f \in \mathrm{E}$ avec f de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f'' \in \mathrm{E}$.
(b) Montrer que $f' \in \mathrm{E}$.
(c) Exprimer $\langle f',f' \rangle + \langle f,f'' \rangle$, $\langle f,f' \rangle$, $\langle f',f'' \rangle$ en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$.

3. On pose $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \langle f,f \rangle & \langle f',f \rangle & \langle f'',f \rangle \\ \langle f,f' \rangle & \langle f',f' \rangle & \langle f'',f' \rangle \\ \langle f,f'' \rangle & \langle f',f'' \rangle & \langle f'',f'' \rangle \end{pmatrix}$$

Montrer que $\det(\mathrm{A}) \geqslant 0$ puis étudier le cas d'égalité.

Corrigé : 1.(a) Une fonction f est dite *intégrable* sur $[\,0\,;+\infty\,[$ si elle est continue par morceaux sur cet intervalle et d'intégrale absolument convergente sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

1.(b) Soit $(f,g) \in \mathrm{E}^2$. On a clairement $fg \in \mathscr{C}^0([\,0\,;+\infty\,[,\mathbb{R})$ puis
$$0 \leqslant |fg| \leqslant \frac{1}{2}\,(f^2+g^2)$$

Ainsi $$\boxed{\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad fg \in \mathrm{L}^1([\,0\,;+\infty\,[,\mathbb{R})}$$

La fonction nulle est dans E. Soit $(f,g,\lambda) \in \mathrm{E}^2 \times \mathbb{R}$. On a $\lambda f + g \in \mathscr{C}^0([\,0\,;+\infty\,[,\mathbb{R})$ puis
$$(\lambda f + g)^2 = \lambda^2 f^2 + 2\lambda f b + g^2$$
qui est intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ comme combinaison linéaire de telles fonctions. On conclut
$$\boxed{\text{L'ensemble E est un sev du } \mathbb{R}\text{-ev } \mathscr{C}^0([\,0\,;+\infty\,[,\mathbb{R}).}$$

2.(a) L'application $(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle$ est une forme symétrique, linéaire en la première variable par bilinéarité du produit et linéarité de l'intégrale car convergence. Pour $f \in \mathrm{E}$, on a
$$\langle f,f \rangle = \int_0^{+\infty} f^2 \geqslant 0$$
et si $\langle f,f \rangle = 0$, alors par continuité et positivé de l'intégrande f^2, il vient $f^2(t) = 0$ pour $t \geqslant 0$ d'où $f = 0_{\mathrm{E}}$. On conclut
$$\boxed{\text{L'application } (f,g) \mapsto \langle f,g \rangle \text{ est un produit scalaire sur E.}}$$

2.(b) Par intégration par parties, il vient pour $x \geqslant 0$
$$\int_0^x f'^2 = ff'(x) - ff'(0) - \int_0^x ff''$$
d'où $$ff'(x) = ff'(0) + \int_0^x ff'' + \int_0^x f'^2$$
On a ff'' intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ d'après le résultat de la question 1.(b) ce qui prouve que $x \mapsto \int_0^x ff''$ admet une limite finie pour $x \to +\infty$. La fonction $x \mapsto \int_0^x f'^2$ est croissante et admet donc une limite, éventuellement infinie, pour $x \to +\infty$. Supposons $\int_0^x f'^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Alors, il s'ensuit $ff'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ d'où $ff'(x) \geqslant 1$ pour $x \geqslant \mathrm{A}$ avec $\mathrm{A} \geqslant 0$ et par intégration pour $x \geqslant \mathrm{A}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{A}}^{x} f^2(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathrm{A}}^{x} \left(f^2(\mathrm{A}) + \int_{\mathrm{A}}^{t} 2ff'(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t\\ &\geqslant \int_{\mathrm{A}}^{x} \left(f^2(\mathrm{A}) + 2(t-\mathrm{A})\right)\,\mathrm{d}t \geqslant (x-\mathrm{A})f^2(\mathrm{A}) + (x-\mathrm{A})^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty\end{aligned}$$

ce qui contredit $f \in \mathrm{E}$. On conclut

$$\boxed{f' \in \mathrm{E}}$$

2.(c) D'après la relation

$$\forall x \geqslant 0 \qquad ff'(x) = ff'(0) + \int_0^x ff'' + \int_0^x f'^2$$

la fonction ff' admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Supposons $\ell \neq 0$, par exemple $\ell > 0$. On dispose de $\mathrm{A} \geqslant 0$ tel que $ff'(x) \geqslant \ell/2$ pour $x \geqslant \mathrm{A}$ d'où pour $x \geqslant \mathrm{A}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{A}}^{x} f^2(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathrm{A}}^{x} \left(f^2(\mathrm{A}) + \int_{\mathrm{A}}^{t} 2ff'(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t\\ &\geqslant \int_{\mathrm{A}}^{x} \left(f^2(\mathrm{A}) + \ell(t-\mathrm{A})\right)\,\mathrm{d}t \geqslant (x-\mathrm{A})f^2(\mathrm{A}) + \frac{\ell}{2}(x-\mathrm{A})^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty\end{aligned}$$

ce qui contredit $f \in \mathrm{E}$. On en déduit

$$ff'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Ainsi $$\int_0^{+\infty} f'^2 = [ff']_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} ff'' = -ff'(0) - \int_0^{+\infty} ff''$$

c'est-à-dire $$\boxed{\langle f', f'\rangle + \langle f, f''\rangle = -f(0)f'(0)}$$

Comme $f \in \mathrm{E}$ et $f' \in \mathrm{E}$, la fonction ff' est intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et par conséquent

$$x \mapsto \int_0^x ff' = \frac{1}{2}\left[f^2(x) - f^2(0)\right]$$

admet une limite finie pour $x \to +\infty$. On en déduit que f^2 admet une limite finie en $+\infty$ et par un raisonnement identique à précédemment, il vient $f^2(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Ainsi

$$\int_0^{+\infty} ff' = \left[\frac{1}{2}f^2\right]_0^{+\infty}$$

On peut appliquer exactement la même démarche à f' et f'' et on conclut

$$\boxed{\langle f, f'\rangle = -\frac{1}{2}f^2(0) \qquad \langle f', f''\rangle = -\frac{1}{2}f'(0)^2}$$

3. La matrice A est une matrice de Gram. On a $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$, diagonalisable d'après le théorème spectral, et pour $\mathrm{X}^\top = \begin{pmatrix} x & y & z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$, il vient

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{AX} = \|xf + yf' + zf''\|^2 \geqslant 0$$

ce qui prouve $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_3^+(\mathbb{R})$ d'où $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset [\,0\,;+\infty\,[$ et par conséquent

$$\boxed{\det(\mathrm{A}) \geqslant 0}$$

Puis, on a $$\mathrm{X}^\top\mathrm{AX} = 0 \iff xf + yf' + zf'' = 0$$

Par conséquent, on obtient

$$\det(\mathrm{A}) > 0 \iff \mathrm{A} \in \mathscr{S}_3^{++}(\mathbb{R}) \iff (f, f', f'') \text{ libre}$$

On conclut $$\boxed{\det(\mathrm{A}) = 0 \iff (f, f', f'') \text{ liée}}$$

Remarque : On peut aller plus loin dans l'étude en écrivant la liaison de la famille (f, f', f'') et en résolvant l'équation différentielle associée avec distinction des cas.

Exercice 8 (Centrale 2024)

1. En utilisant une comparaison série/intégrale dont on rappellera le principe, déterminer un équivalent simple de $\mathrm{H}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ pour $n \to +\infty$.
2. Un entier n non nul est dit sans facteur carré s'il n'existe pas de $k \geqslant 2$ tel que k^2 divise n. Montrer que pour tout entier i non nul, il existe un unique couple (m, a) avec a et m entiers non nuls et m sans facteurs carrés tels que $i = ma^2$.
3. Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1\,;\, n]\!]$. On pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} & \mathrm{X} \end{pmatrix}$. Soit p_n la probabilité que M ne soit pas inversible. Montrer

$$p_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

Corrigé : 1. Par décroissance $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ continue par morceaux sur $[\,1\,;+\infty\,[$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

2. Soit i entier non nul. On a

$$\begin{aligned} i = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(i)} &= \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{2\lfloor v_p(i)/2\rfloor + v_p(i) - 2\lfloor v_p(i)/2\rfloor} \\ &= \left(\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\lfloor v_p(i)/2\rfloor}\right)^2 \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(i)-2\lfloor v_p(i)/2\rfloor} \end{aligned}$$

On observe $v_p(i) - 2\lfloor v_p(i)/2\rfloor \in \{0, 1\}$ pour tout $p \in \mathcal{P}$ et on conclut

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^* \quad | \quad \exists!(a, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ : \ i = ma^2 \quad \text{avec} \quad m \text{ sans facteurs carrés}}$$

3. On a $$\{\mathrm{M} \text{ non inversible}\} = \{\det(\mathrm{M}) = 0\} = \{\mathrm{X}^2 = \mathrm{YZ}\}$$

d'où $$\mathbb{P}(\det(\mathrm{M}) = 0) = \sum_{(x,y,z)\in[\![1\,;\,n]\!]^3} \frac{1}{n^3} \operatorname{Card}\{(x, z, y) \in [\![1\,;\, n]\!]^3 \mid x^2 = yz\}$$

Soit $(x, y, z) \in [\![1\,;\, n]\!]^3$ tel que $x^2 = yz$. On dispose d'un unique couple (a, q) d'entiers non nuls tel que $y = a^2 q$ avec q sans facteurs carrés et d'un unique couple (r, t) d'entiers non nuls tel que $z = rt^2$ avec r sans facteurs carrés. Comme yz est un carré, on a nécessairement $r = q$. En effet, on a

$$yz \text{ carré} \iff qr \text{ carré} \iff \forall p \in \mathcal{P} \quad v_p(q) + v_p(r) \text{ pair} \iff \forall p \in \mathcal{P} \quad v_p(q) = v_p(r)$$

la dernière équivalence découlant du fait que les p-valuations de q et r sont dans $\{0,1\}$. Le choix de a est un entier dans $[\![1\,;\, \lfloor \sqrt{n} \rfloor]\!]$ puis le choix de q est un entier dans $[\![1\,;\, \lfloor n/a^2 \rfloor]\!]$ puis le choix de t avec $t^2 = \dfrac{z}{q}$ est un entier dans $[\![1\,;\, \left\lfloor \sqrt{n/q} \right\rfloor]\!]$. Ainsi, on a au plus

$$\sum_{a=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \sum_{q=1}^{\lfloor n/a^2 \rfloor} \sqrt{\frac{n}{q}}$$

choix possibles de triplets satisfaisant la condition voulue. Par comparaison série/intégrale, on a pour p entier non nul

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=1}^{p} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \int_{0}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n}$$

d'où $$\sum_{a=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \sum_{q=1}^{\lfloor n/a^2 \rfloor} \sqrt{\frac{n}{q}} \leqslant \sum_{a=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} 2\sqrt{n} \sqrt{\left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor} \leqslant \sum_{a=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} 2\frac{n}{a} = 2n\mathrm{H}_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \leqslant 2n\left(1 + \ln(\sqrt{n})\right)$$

On conclut $$\boxed{\mathbb{P}(\det(\mathrm{M}) = 0) \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}$$