Cahier de vacances - Mathématiques MPSI

Été 2025

Table des matières

La difficulté des exercices est mesurée par le nombre d'étoiles. Un hyperlien permet de naviguer de l'énoncé au corrigé et réciproquement.

Si vous détectez des coquilles, je vous serais reconnaissant de bien vouloir me les signaler à l'adresse : blandelle.math@gmail.com

I Énoncés

Récurrence

Exercice 1 (*)

Montrer que $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (2n)! \geqslant 2^n n!$$

Exercice 2 (*)

On rappelle qu'une fonction polynomiale est dérivable autant de fois qu'on le souhaite. On pose $f(x) = x^n$ pour x réel avec n entier non nul. Pour k entier, on note $f^{(k)}$ la dérivée k-ième de f.

Montrer $$\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(k)}(x) = k!\tbinom{n}{k}x^{n-k}$$

Exercice 3 (**)

On note $$\mathrm{A} = \left\{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k 2^k,\ (\alpha_k)_{k\in[\![0\,;\, n-1]\!]} \in \{0,1\}^{n-1} \times \{1\},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Montrer que tout entier non nul possède une unique écriture dans A.

Exercice 4 (**)

Établir $$\forall n \geqslant 2 \qquad \frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \tbinom{2n}{n} < 4^n$$

Calculs

Exercice 5 (*)

Montrer $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x + y)^2 \leqslant 2(x^2 + y^2)$$

Exercice 6 (*)

Montrer $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |xy| \leqslant \frac{x^2 + y^2}{2}$$

puis déterminer le cas d'égalité.

Exercice 7 (*)

Soit m réel et $\varepsilon > 0$. Dans l'équivalence

$$|x - m| \geqslant \varepsilon \iff x \in \mathrm{I}$$

déterminer I sous forme d'intervalle ou d'union d'intervalles.

Exercice 8 (**)

Soit x réel et a, b entiers non nuls, montrer

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor$$

Sommes et produits

Exercice 9 (*)

Soit n entier. Exprimer à l'aide de factorielles les produits $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$ et $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$.

Exercice 10 (**)

Par convention, on note $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$ des entiers.

1. Soit n entier non nul. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2}$ en utilisant une écriture téléscopique.
2. En déduire une expression simple de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 11 (***)

Soit n entier. Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} k3^k$$

Exercice 12 (**)

Soit $(a_n)_n$ suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Montrer que
$$\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i+j} = \sum_{\ell=0}^{n} (\ell+1)a_\ell + \sum_{\ell=n+1}^{2n} (2n-\ell+1)a_\ell$$

Étude de fonctions

Exercice 13 (*)

Montrer
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{ch}(x) \leqslant \mathrm{e}^{x^2/2}$$

Exercice 14 (**)

Soit $\alpha \in \,]\,0\,;1\,]$. Établir
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad |x^\alpha - y^\alpha| \leqslant |x-y|^\alpha$$

Exercice 15 (***)

Montrer
$$\forall x \in [\,0\,;\pi\,] \qquad \sin(x)^2 \leqslant \frac{4}{\pi^2} x(\pi - x)$$

Fonctions réciproques

Exercice 16 (**)

Représenter le graphe de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos}(\cos(x))$.

Exercice 17 (***)

Montrer en précisant le domaine de définition

$$|\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{sh}\,(x))| = \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\,(x)}\right)$$

Exercice 18 (***)

Résoudre $$\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Nombres complexes

Exercice 19 (*)

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$. Montrer

$$|a| = 1 \quad \text{ou} \quad |b| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$$

Exercice 20 (**)

Pour x réel et n entier, linéariser $\cos(x)^n$ puis $\sin(x)^n$.

Exercice 21 (***)

Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Calculer $\mathrm{S}_{n,p} = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{kp\pi}{n+1}\right)$.

Exercice 22 (***)

Soit n entier non nul. Montrer que

$$\forall (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \qquad \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i|$$

et que l'égalité est une inégalité si et seulement si

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \quad | \quad \forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \quad z_i = |z_i|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

Primitives

Exercice 23 (*)

Calculer $$\int_0^1 \mathrm{Arctan}\,(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 24 (**)

Primitive de $$x \mapsto \sqrt{2x - x^2}$$

Exercice 25 (***)

Pour $x > 1$ et $y > 1$, on note $\qquad \beta(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer $$\beta(x,y) = \beta(y,x)$$

2. Établir $$\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y)$$

3. En déduire $$\beta(x+1,y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x,y)$$

Borne supérieure et inférieure

Exercice 26 (*)

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f, g fonctions majorées de I dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. Montrer

$$\operatorname*{Sup}_{x\in\mathrm{I}} f(x) \leqslant \operatorname*{Sup}_{x\in\mathrm{I}} g(x)$$

Exercice 27 (**)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On définit $\mathrm{d}(x,\mathrm{A}) = \inf\{|x-a|\,,\ a \in \mathrm{A}\}$. Montrer

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |\mathrm{d}(x,\mathrm{A}) - \mathrm{d}(y,\mathrm{A})| \leqslant |x-y|$$

Exercice 28 (***)

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f fonction majorée de I dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \geqslant 0$. Montrer

$$\operatorname*{Sup}_{x\in\mathrm{I}} \lambda f(x) = \lambda \operatorname*{Sup}_{x\in\mathrm{I}} f(x)$$

Équations différentielles

Exercice 29 (*)

Résoudre $$\cos(x)y' + \sin(x)y = \sin^2(x) \quad \text{sur} \quad \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$$

Exercice 30 (*)

Résoudre $$\sqrt{1-x^2}\,y' + y = 1 \quad \text{sur} \quad]-1\,;1[$$

Exercice 31 (*)

Soient u, v dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, non identiquement nulles, vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = 0$$

1. Montrer qu'il existe λ réel tel que u et v soient solutions respectives de

$$z'' + \lambda z = 0 \quad \text{et} \quad z'' - \lambda z = 0$$

2. Déterminer, en fonction de λ, la forme des fonctions u et v.

Exercice 32 (**)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x \tag{E}$$

Exercice 33 (***)

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall x \geqslant 0 \qquad |f'(x) + f(x)| \leqslant 1$$

Montrer $\qquad \forall x \geqslant 0 \qquad |f(x) - \mathrm{e}^{-x} f(0)| \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-x}$

Suites numériques

Exercice 34 (*)

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{k+n^2}$ pour n entier.

Exercice 35 (*)

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^2}$ pour n entier non nul.

Exercice 36 (**)

Déterminer une expression du terme général de la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_0 \text{ réel} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = a u_n + bn \quad \text{avec} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 37 (**)

Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

Exercice 38 (*)

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$ pour n entier.

Exercice 39 (***)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\qquad \forall x \geqslant 0 \qquad f_n(x) = -1 + \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$

1. Montrer $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \exists! x_n \geqslant 0 \quad | \quad f_n(x_n) = 0$
2. Justifier $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad x_n \geqslant \dfrac{1}{2}$
3. Étudier la convergence de $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 40 (***)

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ dans $\mathbb{U}$ deux à deux distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ dans $\mathbb{C}^*$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \lambda_i^n$$

Montrer $\qquad u_n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$

Exercice 41 (***)

Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer qu'il existe une suite extraite de suite $(z^n)_n$ qui tend vers 1.

Matrices

Exercice 42 (**)

Soit la matrice J de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de 1.

1. Calculer J^2.
2. En déduire que $\mathrm{I}_n + \mathrm{J}$ est inversible et préciser son inverse.

Exercice 43 (**)

Soient $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M} = \mathrm{X}\mathrm{Y}^\top$. Déterminer une expression simple de M^p avec p entier.

Exercice 44 (**)

Soit $\mathrm{V} = \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1\leqslant k,\ell\leqslant n+1} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ avec $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n+1}}$. Calculer $\mathrm{V}\bar{\mathrm{V}}$. En déduire l'inversibilité de la matrice V et préciser son inverse.

Exercice 45 (*)

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{rg}\, \mathrm{M} = 1$. Montrer qu'il existe X et Y des matrices colonnes non nulles telles que $\mathrm{M} = \mathrm{X}\mathrm{Y}^\top$.

Exercice 46 (**)

Soit n entier non nul. Une matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *nilpotente* s'il existe p entier non nul tel que $\mathrm{M}^p = 0$. Soient $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ avec B nilpotente et $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$. Montrer

$$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

Bijections

Exercice 47 (**)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;1\,[$.
2. Expliciter la réciproque f^{-1}.

Exercice 48 (***)

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. Montrer

$$f \text{ bijective} \iff \forall \mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) \qquad f(\mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{A}) = \mathrm{F} \smallsetminus f(\mathrm{A})$$

Exercice 49 (***)

On définit $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ par

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \pi(m,n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$$

1. Justifier que π est définie de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.
2. Montrer
$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \pi(m, n+1) = \pi(m+1, n) + 1 \quad \text{et} \quad \pi(n+1, 0) = \pi(0, n) + 1$$
En déduire que π est surjective.
3. Montrer
$$\forall (m,n,m',n') \in \mathbb{N}^4 \qquad m' + n' \geqslant m + n + 1 \quad \Longrightarrow \quad \pi(m',n') > \pi(m,n)$$
En déduire l'injectivité de π.

Arithmétique

Exercice 50 (*)

Montrer $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 5 \text{ divise } 2^{3n+5} + 3^{n+1}$$

Exercice 51 (**)

Pour n entier non nul, on note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n. Établir l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=1}^{n} \tau(k) = \sum_{d=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$$

Exercice 52 (**)

Soient a et p des entiers supérieurs à 2.
Montrer que si $a^p - 1$ est premier, alors $a = 2$ et p est premier.

Exercice 53 (**)

Soient a, b dans $\mathbb{Z}$. Établir l'égalité $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$ sans utiliser la décomposition de a et b en facteurs premiers.

Limites

Exercice 54 (*)

Déterminer
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\operatorname{Arctan}(x)} - \frac{2x}{\pi}$$

Exercice 55 (***)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b réels pour que $f : t \mapsto a\cos(t) + b\sin(t)$ ait une limite en $+\infty$.

Exercice 56 (**)

Soit n entier non nul. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} [\ln(x + k + 1) - \ln(k + 1)]$.

Continuité

Exercice 57 (**)

Trouver toutes les application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en zéro vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(2x) = f(x)$$

Exercice 58 (***)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |f(x) - f(y)| = |x - y|$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |f(x) + f(y)| = |x + y|$

Exercice 59 (***)

On pose
$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \,]\,0\,;1\,] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Justifier que la fonction f est continue sur $[\,0\,;1\,]$.
2. La fonction $g : x \in [\,0\,;1\,] \mapsto \lfloor f(x) \rfloor$ est-elle continue par morceaux sur $[\,0\,;1\,]$?

Structures algébriques

Exercice 60 (*)

Soit $(\mathrm{G}, \times)$ un groupe et $\mathrm{Z}(\mathrm{G}) = \{x \in \mathrm{G} \mid \forall g \in \mathrm{G} \quad xg = gx\}$ son *centre*. Soit φ un morphisme surjectif de G sur G. Montrer

$$\varphi(\mathrm{Z}(\mathrm{G})) \subset \mathrm{Z}(\mathrm{G})$$

Exercice 61 (**)

Soit $(\mathrm{G}, \star)$ un groupe.

1. Montrer qu'une union de deux sous-groupes de $(\mathrm{G}, \star)$ est un sous-groupe si et seulement si l'un contient l'autre.
2. Le résultat se généralise-t-il à plus de deux sous-groupes ?

Exercice 62 (**)

On note $$\mathrm{A} = \left\{\tfrac{m}{2^n},\ (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}$$

1. Montrer que $(\mathrm{A}, +, \times)$ est un anneau.
2. Déterminer $\mathrm{U}(\mathrm{A})$.

Dérivation

Exercice 63 (*)

En considérant la dérivée n-ième de l'application polynomiale $x \mapsto x^{2n}$, déterminer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 64 (**)

Déterminer $$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k + (-1)^k}{n^3}\right)$$

Exercice 65 (**)

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 + u_n}$ pour n entier.

Exercice 66 (*)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ scindé à racines simples avec $\deg \mathrm{P} > 1$. Montrer que P' est également scindé à racines simples.

Convexité

Exercice 67 (*)

Établir $$\forall x \in [\,0\,; 1\,] \qquad \sin(\pi x) \leqslant \pi(1 - x)$$

Exercice 68 (*)

Soient $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$. Montrer $$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}$$

Exercice 69 (**)

Soient $p, q > 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Montrer $$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$
2. Montrer que pour tout n entier et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ réels positifs, on a $$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} \sum_{k=1}^{n} b_k^q{}^{1/q}$$

Polynômes

Exercice 70 (**)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

1. Montrer que $\mathrm{P} - \mathrm{X}$ divise $\mathrm{P} \circ \mathrm{P} - \mathrm{P}$.
2. En déduire que $\mathrm{P} - \mathrm{X}$ divise $\mathrm{P} \circ \mathrm{P} - \mathrm{X}$.

Exercice 71 (**)

Soit $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}$ un ensemble fini non vide. Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $$\forall x \in \mathrm{X} \qquad \mathrm{P}(x) = \sqrt[3]{x}$$

Exercice 72 (**)

Soit n entier et θ réel. Établir $$\cos(n\theta) = \mathrm{T}_n(\cos(\theta)) \quad \text{avec} \quad \mathrm{T}_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (\mathrm{X}^2 - 1)^k \mathrm{X}^{n-2k}$$

Exercice 73 (**)

Soit $(\mathrm{P}_n)_n$ suite de polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ définie par $$\mathrm{P}_0 = 2, \quad \mathrm{P}_1 = \mathrm{X} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{P}_{n+2} = \mathrm{X}\mathrm{P}_{n+1} - \mathrm{P}_n$$

1. Calculer P_2, P_3.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Montrer que pour tout $(n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}^* \qquad \mathrm{P}_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n$.
4. En déduire une expression simple de $\mathrm{P}_n(2\cos(\theta))$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
5. Déterminer les racines de P_n.

Exercice 74 (***)

Déterminer l'ensemble des polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Espaces vectoriels

Exercice 75 (*)

Soit n entier non nul, $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{H} = \{\mathrm{M} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 0\}$. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)$.

Exercice 76 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour λ réel, on note $f_\lambda : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. Montrer que $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de E.

Exercice 77 (***)

Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et on note $u_i = (1, a_i, \ldots, a_i^n)$ pour tout $i \in [\![\, 0\,;\, n \,]\!]$. Montrer

$$(u_0, \ldots, u_n) \text{ libre } \iff \mathrm{Card}\,\{a_0, \ldots, a_n\} = n + 1$$

Dénombrement

Exercice 78 (**)

Soit E un ensemble à n éléments. Déterminer le nombre de couples $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^2$ dont l'intersection est de cardinal 1.

Exercice 79 (**)

On choisit 11 nombres parmi $\{1, \ldots, 20\}$. Montrer qu'on en trouve au moins deux dont la somme vaut 21.

Exercice 80 (***)

Pour p et n entiers, on note $\mathrm{S}_{p,n}$ le nombre de surjections de $[\![\, 1\,;\, p \,]\!]$ dans $[\![\, 1\,;\, n \,]\!]$. Par convention, on pose $[\![\, 1\,;\, 0 \,]\!] = \varnothing$.

1. Préciser $\mathrm{Card}\,\left([\![\, 1\,;\, n \,]\!]^{[\![\, 1\,;\, p \,]\!]}\right)$.
2. Pour p et n entiers, établir $\qquad n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{S}_{p,k}$
3. Soit n entier et $u_0, \ldots, u_n$ des réels. Simplifier
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} u_\ell$$
4. En déduire une formule donnant $\mathrm{S}_{p,n}$ pour p et n entiers.

Applications linéaires

Exercice 81 (**)

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose qu'il existe n entier non nul tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est libre.

Exercice 82 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^3 = \mathrm{id}$.

1. Montrer $$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}\,) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,)$$
2. Montrer $$\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}\,) = \mathrm{Im}\,(f^2 + f + \mathrm{id}\,) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,) = \mathrm{Ker}\,(f^2 + f + \mathrm{id}\,)$$

Exercice 83 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et p, q des projecteurs de E. Montrer que
$$p - q \text{ projecteur} \iff p \circ q = q \circ p = q$$
Quand cette condition est réalisée, montrer
$$\mathrm{Im}\,(p - q) = \mathrm{Im}\; p \cap \mathrm{Ker}\; q \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\,(p - q) = \mathrm{Ker}\; p + \mathrm{Im}\; q$$

Analyse asymptotique

Exercice 84 (*)

Déterminer $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln(1 + x)} - \frac{1}{x}$$

Exercice 85 (**)

Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\sin\left(\pi\sqrt{1 + x}\right)$.

Exercice 86 (**)

Soit n entier non nul et $f(x) = (1 - \mathrm{e}^x)^n$ pour tout x réel.

1. Montrer que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in [\![\, 0\,;\, n - 1\,]\!]$.
2. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k k^p$ pour tout $p \in [\![\, 0\,;\, n\,]\!]$.

Dimension finie

Exercice 87 (*)

Soient E, F des $\mathbb{K}$-ev et f, g dans $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})^2$ avec Im f et Im g de dimension finie. Montrer
$$|\mathrm{rg}\,(f) - \mathrm{rg}\,(g)| \leqslant \mathrm{rg}\,(f + g) \leqslant \mathrm{rg}\,(f) + \mathrm{rg}\,(g)$$

Exercice 88 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul. On pose

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} - \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$$

Justifier que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis calculer φ^2 et préciser $\mathrm{Ker}\ \varphi$, $\mathrm{Im}\ \varphi$.

Exercice 89 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}$.

Exercice 90 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n entier non nul et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E. On pose

$$\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid v \circ u = u \circ v\}$$

1. Montrer que $\mathscr{C}(u)$ est un sous-anneau et un sev de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer $$\mathscr{C}(u) = \mathbb{K}_{n-1}[u]$$
3. Déterminer $\dim \mathscr{C}(u)$.

Exercice 91 (**)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Interpréter A comme matrice d'un endomorphisme de $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Exercice 92 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ avec n entier non nul. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, on pose $\varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\mathrm{P}' - n\mathrm{X}\mathrm{P}$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Préciser $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\varphi$ où $\mathscr{C}$ désigne la base canonique de E.
2. Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}\ \varphi$ et $\mathrm{Im}\ \varphi$.

Fractions rationnelles

Exercice 93 (*)

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 94 (**)

1. Soient A, B dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ avec $\deg \mathrm{A} < \deg \mathrm{B}$. On suppose B scindé à racines simples avec $\mathrm{B} = \lambda \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - \alpha_i)$. Montrer

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{A}(\alpha_i)}{\mathrm{B}'(\alpha_i)(\mathrm{X} - \alpha_i)}$$

2. Soit $z_1, \ldots, z_n$ des complexes non nuls deux à deux distincts. On note $\mathrm{P} = \prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - z_k)$.

Calculer $$\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^k}{\mathrm{P}'(z_i)} \quad \text{pour } k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$$

Exercice 95 (**)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ scindé à racines simples $x_1, \ldots, x_n$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{P}'(\alpha) \neq 0$. Montrer qu'il existe $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ tel que

$$|\alpha - x_i| \leqslant n \left| \frac{\mathrm{P}(\alpha)}{\mathrm{P}'(\alpha)} \right|$$

Calcul intégral

Exercice 96 (*)

Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$.

1. Étudier le comportement asymptotique de $\displaystyle\int_a^b f(t) \mathrm{e}^{int} \,\mathrm{d}t$ pour $n \to +\infty$.
2. En déduire les comportements de de $\displaystyle\int_a^b f(t) \cos(nt) \,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t) \sin(nt) \,\mathrm{d}t$ pour $n \to +\infty$.

Exercice 97 (**)

Déterminer $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) \quad \text{avec} \quad f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$$

Exercice 98 (***)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $$\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi} |\sin(nt)| \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_n = \int_0^{\pi} t\,|\sin(nt)| \,\mathrm{d}t$$

Montrer que les suites $(\mathrm{I}_n)_{n \geqslant 1}$ et $(\mathrm{J}_n)_{n \geqslant 1}$ sont constantes.

Exercice 99 (Intégrale de Wallis **)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n \,\mathrm{d}t$$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout $n \geqslant 2$.

2. Donner une expression de I_n à l'aide de factorielles en distinguant selon la parité de n.
3. Étudier la monotonie de la suite $(\mathrm{I}_n)_n$.
4. En considérant la suite $(n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1})_{n\geqslant 1}$, déterminer un équivalent de I_n pour $n \to +\infty$.

Exercice 100 (**)

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et $\mathrm{I}_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q \,\mathrm{d}t$.

1. Établir une relation de récurrence entre $\mathrm{I}_{p,q}$ et $\mathrm{I}_{p+1,q-1}$ si q est non nul.
2. En déduire une expression de $\mathrm{I}_{p,q}$ avec des factorielles.

Probabilités finies

Exercice 101 (**)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi avec $\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = -1) = 1-p$ et $p \in \,]\,0\,;1\,[$. Pour $k \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]$, on note $\mathrm{Y}_k = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \mathrm{X}_i$, $a_k = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_k = 1)$ et $b_k = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_k = -1)$.

1. Montrer $\qquad \exists \mathrm{Q} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \qquad \forall k \in [\![\, 1\,;\, n-1 \,]\!] \qquad \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \mathrm{Q} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$
2. En déduire une expression de a_n en fonction de n et p.

Exercice 102 (**)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant n)$$

Exercice 103 (***)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, U et V des variables aléatoires réelles vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{E}(\mathrm{U}^k) = \mathbb{E}(\mathrm{V}^k)$$

Montrer que U et V ont même loi.

Exercice 104 (***)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![\, 0\,;\, 2\mathrm{N} \,]\!]$ avec N entier non nul. On note $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$.

1. Calculer $m = \mathbb{E}(\mathrm{X}_1)$.
2. Soit $t > 0$. Justifier l'égalité

$$\left\{\mathrm{S}_n \geqslant \frac{3nm}{2}\right\} = \left\{\mathrm{e}^{\,t(\mathrm{S}_n - n\mathrm{N})} \geqslant \mathrm{e}^{\,\frac{t\mathrm{N}n}{2}}\right\}$$

3. En déduire $\qquad \forall t > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \dfrac{3nm}{2}\right) \leqslant \mathrm{e}^{n\varphi(t)}$

avec $$\varphi(t) = -\frac{\mathrm{N}t}{2} + \ln\left(\frac{\mathrm{sh}\,((\mathrm{N}+1/2)t)}{\mathrm{sh}\,(t/2)}\right) - \ln(2\mathrm{N}+1)$$

4. Déterminer un développement limité de φ en 0 à l'ordre 1.
5. Conclure qu'il existe $r \in \,]\,0\,;1\,[$ tel que

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \frac{3nm}{2}\right) \leqslant r^n$$

Exercice 105 (***)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$.

1. Montrer $\qquad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n > \dfrac{np}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \leqslant \dfrac{np}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

   Dans ce qui suit, on note

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}_n = \left\{\mathrm{S}_n > \frac{np}{2}\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}_n = \left\{\mathrm{S}_n \leqslant \frac{np}{2}\right\}$$

2. Montrer $\qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n) - \dfrac{\pi}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Groupe symétrique

Exercice 106 (*)

Soit $c = \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_p \end{pmatrix}$ un p-cycle de S_n. Pour $\sigma \in \mathrm{S}_n$, déterminer $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.

Exercice 107 (*)

Soit $n \geqslant 2$. Calculer $$\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma)$$

Exercice 108 (*)

Soit $n \geqslant 2$ et $\sigma \in \mathrm{S}_n$. On note r le nombre de cycles dans la décomposition de σ en cycles à supports disjoints et p le nombre de points fixes. Déterminer $\varepsilon(\sigma)$ en fonction de n, r et p.

Déterminants

Exercice 109 (**)

Soient a, x, y, z des complexes. Calculer le déterminant d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{vmatrix} a & x & \dots & \dots & x \\ y & z & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ y & 0 & \dots & 0 & z \end{vmatrix}$$

Exercice 110 (**)

Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ avec n entier non nul. Montrer que si les matrices A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ alors elles le sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 111 (***)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi. On définit

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathrm{V}(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)(\omega) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \mathrm{X}_1(\omega) & \dots & \mathrm{X}_n(\omega) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{X}_1^{n-1}(\omega) & \dots & \mathrm{X}_n^{n-1}(\omega) \end{vmatrix}$$

Déterminer $\mathbb{E}(\mathrm{V}(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n))$.

Séries numériques

Exercice 112 (**)

Nature de la série de terme général $\sin\left(\pi\sqrt{n^4+1}\right)$.

Exercice 113 (**)

Vérifier la convergence puis calculer la somme de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 114 (**)

Étudier la nature de la suite de terme général $u_n = \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \dfrac{\sqrt{n}}{n!}$.

Indication : considérer $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

Exercice 115 (Constante γ d'Euler **)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge.

Familles sommables

Exercice 116 (*)

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ bijective. Étudier la nature des séries de terme général :

1. $\dfrac{1}{\sigma(n)+n^2}$
2. $\dfrac{1}{\sigma(n)^2+n}$

Exercice 117 (**)

Soit α réel. Étudier la somme $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^\alpha}$.

Exercice 118 (**)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Justifier l'existence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2-z^2}$ puis montrer

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2-z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta(2k+2) z^{2k} \quad \text{avec} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Espaces préhilbertiens

Exercice 119 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On pose

$$\forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \int_0^\pi \mathrm{P}(\cos\theta)\mathrm{Q}(\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

Justifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Exercice 120 (**)

Montrer $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\sqrt{k} < \sqrt{2^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k}$

Exercice 121 (**)

Soit E euclidien et F, G des sev de E.

1. Déterminer $(\mathrm{F}+\mathrm{G})^\perp$.
2. En déduire $(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})^\perp$.

Exercice 122 (**)

Justifier l'existence puis calculer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(1+at+bt^2\right)^2 \,\mathrm{d}t$.

Exercice 123 (*)

Soit E préhilbertien réel et a vecteur normé de E. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = x - \langle x, a \rangle \, a$$

1. Justifier que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis décrire f.
2. On suppose E euclidien muni de $\mathscr{B}$ une base orthonormée. On note $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} a$. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f$.

II Corrigés

Exercice 1 (*)

Montrer que $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (2n)! \geqslant 2^n n!$$

Corrigé : On note $\mathscr{P}(n)$: $(2n)! \leqslant 2^n n!$ pour n entier. La propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie puisque $1 \leqslant 1$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un rang n entier fixé. On a

$$(2n+2)! = 2(n+1)(2n+1)(2n)! \geqslant 2^{n+1}(n+1)!(2n+1) \geqslant 2^{n+1}(n+1)!$$

ce qui clôt la récurrence. On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad (2n)! \geqslant 2^n n!}$$

Exercice 2 (*)

On rappelle qu'une fonction polynomiale est dérivable autant de fois qu'on le souhaite. On pose $f(x) = x^n$ pour x réel avec n entier non nul. Pour k entier, on note $f^{(k)}$ la dérivée k-ième de f.

Montrer $$\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(k)}(x) = k!\binom{n}{k}x^{n-k}$$

Corrigé : Par récurrence.

Exercice 3 (**)

On note $$\mathrm{A} = \left\{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k 2^k,\ (\alpha_k)_{k\in[\![0\,;\, n-1]\!]} \in \{0,1\}^{n-1} \times \{1\}\,,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Montrer que tout entier non nul possède une unique écriture dans A.

Corrigé : Soit $x \in \mathrm{A}$. On a $x = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k 2^k$. Si tous les α_i valent 1, on a

$$x + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + 1 = 2^n - 1 + 1 = 2^n \in \mathrm{A}$$

Sinon, notons $p = \min\{k \in [\![0\,;\, n-1]\!] \mid \alpha_k = 0\}$. On a

$$\begin{aligned} x + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k 2^k + 1 &= \sum_{k=0}^{p-1} 2^k + 0 \times 2^p + \sum_{k=p+1}^{n-1} \alpha_k 2^k + 1 \\ &= 2^p - 1 + 1 + \sum_{k=p+1}^{n-1} \alpha_k 2^k = 2^p + \sum_{k=p+1}^{n-1} \alpha_k 2^k \in \mathrm{A} \end{aligned}$$

Ainsi, la partie A contient 1 et tout élément y admet un successeur d'où, par principe de récurrence, il vient $\mathrm{A} = \mathbb{N}^*$. Supposons que x s'écrive également $x = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \beta_k 2^k$. Si $n < m$, on aurait

$$x \leqslant 2^n - 1 \quad \text{et} \quad x \geqslant 2^{m-1} \geqslant 2^n$$

ce qui est absurde d'où $n = m$ (symétrie des rôles). Si les β_k diffèrent des α_k, on note $q = \max\{k \in [\![0\,;\, n-2]\!] \mid \alpha_k \neq \beta_k\}$. On a

$$x - x = 0 = \pm\, 2^q + \sum_{k=0}^{q-1} (\alpha_k - \beta_k) 2^k \quad \text{avec} \quad \left|\sum_{k=0}^{q-1} (\alpha_k - \beta_k) 2^k\right| \leqslant 2^q - 1 < 2^q$$

ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{Tout entier non nul possède une unique écriture binaire.}}$$

Variante : Soit x entier non nul. On suppose $[\![1\,;\,x]\!] \subset \mathrm{A}$. Notons r_2 le reste de la division euclidienne par 2. On a

$$x+1-r_2(x+1)=2\ell$$

On a $\ell \leqslant x$ d'où $\ell \in \mathrm{A}$ et par conséquent, on dispose de l'écriture $\ell = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \beta_i 2^i$ avec les $\beta_i \in \{0,1\}$, $\beta_{n-1}=1$. Ainsi, on a

$$x+1 = r_2(x+1) + \sum_{i=1}^{n} \beta_{i-1} 2^i \in \mathrm{A}$$

Par principe de récurrence, on conclut $\qquad \mathrm{A} = \mathbb{N}^*$

Exercice 4 (**)

Établir $$\forall n \geqslant 2 \qquad \frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < 4^n$$

Corrigé : Soit $n \geqslant 2$. On a

$$\binom{2n}{n} < \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n$$

On pose $$\mathscr{P}(n) : \frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n}$$

L'initialisation $\mathscr{P}(2)$ est vraie. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie pour $n \geqslant 2$ fixé. On a

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n} > \frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$

Puis, on a les équivalences

$$\begin{aligned}\frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{4^n}{2\sqrt{n}} > \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} &\iff (2n+1)\sqrt{n+1} > 2(n+1)\sqrt{n}\\ &\iff 4n^3+8n^2+5n+1 > 4n^3+8n^2+4n\end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. Ainsi, on a

$$\boxed{\forall n \geqslant 2 \qquad \frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < 4^n}$$

Remarque : Cette preuve ne permet pas de comprendre comment trouver une telle minoration. On a

$$\binom{2n}{n} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(2k+1)}{(n!)^2} = \frac{2^{2n-1}}{n}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2k+1}{2k}\right)$$

Or, on observe $$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \left(1+\frac{1}{2k}\right)^2 = 1+\frac{1}{k}+\frac{1}{4k^2} > 1+\frac{1}{k}$$

d'où $$\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n-1}}{n}\prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{k+1}{k}}$$

On obtient alors la minoration souhaitée.

Exercice 5 (*)

Montrer $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x+y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2)$$

Corrigé : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences

$$(x+y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2) \iff x^2+2xy+y^2 \leqslant 2x^2+2y^2 \iff (x-y)^2 \geqslant 0$$

Cette dernière assertion étant vraie, on conclut

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x+y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2)}$$

Exercice 6 (*)

Montrer $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |xy| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$$

puis déterminer le cas d'égalité.

Corrigé : Soient x, y réels. On a $(|x|-|y|)^2 \geqslant 0$. En développant le carré, on en déduit l'inégalité attendue et le cas d'égalité a lieu si le carré est nul. On conclut

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |xy| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2} \quad \text{avec} \quad |xy| = \frac{x^2+y^2}{2} \iff |x| = |y|}$$

Exercice 7 (*)

Soit m réel et $\varepsilon > 0$. Dans l'équivalence

$$|x-m| \geqslant \varepsilon \iff x \in \mathrm{I}$$

déterminer I sous forme d'intervalle ou d'union d'intervalles.

Corrigé : On a $$|x-m| \geqslant \varepsilon \iff x-m \geqslant \varepsilon \quad \text{ou} \quad x-m \leqslant -\varepsilon$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{I} = \left]-\infty\,; m-\varepsilon\right] \cup \left[m+\varepsilon\,; +\infty\right[}$$

Exercice 8 (**)

Soit x réel et a, b entiers non nuls, montrer

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor$$

Corrigé : On a $$\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \leqslant \frac{x}{a} \quad \text{puis} \quad \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \leqslant \frac{x}{ab}$$

et par croissance de la partie entière $$\left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor$$

Ensuite, on a $$\left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor \leqslant \frac{x}{ab} \quad \text{puis} \quad \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor b \leqslant \frac{x}{a}$$

Par croissance de la partie entière, il vient

$$\left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor b \leqslant \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \quad \text{d'où} \quad \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor \leqslant \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b}$$

et de nouveau par croissance de la partie entière

$$\left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor$$

On conclut $\boxed{\forall (x,a,b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{N}^*)^2 \qquad \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor}$

Exercice 9 (*)

Soit n entier. Exprimer à l'aide de factorielles les produits $\prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k}{2k+1}$ et $\prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k-1}{2k}$.

Corrigé : Les produits d'entiers pairs consécutifs se factorisent. On complète les produits d'entiers impairs pour faire apparaître des factorielles :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k)(2k+1)} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)(2k)}{(2k)^2}$$

On conclut $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}}$

Exercice 10 (**)

Par convention, on note $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$ des entiers.

1. Soit n entier non nul. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{k}{2}$ en utilisant une écriture téléscopique.
2. En déduire une expression simple de $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

Corrigé : 1. D'après l'identité de Pascal, on a

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \iff \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

Par suite, pour n entier non nul, on trouve par télescopage

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{k+1}{3} - \binom{k}{3} \right] = \binom{n+1}{3} - \binom{1}{3}$$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}}$

2. D'après ce qui précède, il vient pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6} \iff \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k + \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$$

On conclut $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

Exercice 11 (***)

Soit n entier. Calculer $$\sum_{k=1}^{n} k3^k$$

Corrigé : On a

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} k3^k = \sum_{1\leqslant \ell\leqslant k\leqslant n} 3^k = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=\ell}^{n} 3^k = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n}\left[3^{n+1}-3^{\ell}\right] = \frac{1}{4}\left(2n3^{n+1}-3(3^n-1)\right)$$

D'où $$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\qquad \mathrm{S}_n = \frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}}$$

Variante : Soit n entier. Un changement d'indice donne

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)3^{k+1} = 3\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)3^k = 3(\mathrm{S}_n - n3^n) + \frac{3(3^n-1)}{2}$$

On retrouve alors le résultat précédent. On pourrait aussi considérer $\mathrm{T}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ (somme géométrique) et déterminer $x\mathrm{T}'_n(x)$ puis évaluer en $x=3$.

Exercice 12 (**)

Soit $(a_n)_n$ suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Montrer que

$$\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} a_{i+j} = \sum_{\ell=0}^{n}(\ell+1)a_\ell + \sum_{\ell=n+1}^{2n}(2n-\ell+1)a_\ell$$

Corrigé : On a

$$\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{\ell=0}^{2n}\left(\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n,\ i+j=\ell} a_{i+j}\right) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \,\mathrm{Card}\,\mathrm{I}_\ell \quad \text{avec} \quad \mathrm{I}_\ell = \{(i,j)\in [\![0\,;\,n]\!]^2 \mid i+j=\ell\}$$

Soit $\ell\in[\![0\,;\,2n]\!]$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_\ell &= \{(i,\ell-i),\ i\in[\![0\,;\,n]\!],\ 0\leqslant \ell-i\leqslant n\}\\ &= \{(i,\ell-i),\ i\in[\![0\,;\,n]\!],\ i\leqslant \ell,\ \ell-n\leqslant i\} = \{(i,\ell-i),\ i\in[\![\max(0,\ell-n)\,;\,\min(n,\ell)]\!]\}\end{aligned}$$

Pour $\ell\in[\![0\,;\,n]\!]$, il vient $$\mathrm{I}_\ell = \{(i,\ell-i), i\in[\![0\,;\,\ell]\!]\}$$

et pour $\ell\in[\![n+1\,;\,2n]\!]$ $$\mathrm{I}_\ell = \{(i,\ell-i), i\in[\![\ell-n\,;\,n]\!]\}$$

On conclut $$\boxed{\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} a_{i+j} = \sum_{\ell=0}^{n}(\ell+1)a_\ell + \sum_{\ell=n+1}^{2n}(2n-\ell+1)a_\ell}$$

Exercice 13 (*)

Montrer $$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \mathrm{ch}\,(x)\leqslant \mathrm{e}^{x^2/2}$$

Corrigé : Soit x réel. On a l'équivalence

$$\mathrm{ch}\,(x)\leqslant \mathrm{e}^{x^2/2} \iff \ln(\mathrm{ch}\,(x))\leqslant \frac{x^2}{2}$$

On pose $$\forall x\in\mathbb{R}\qquad f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln(\mathrm{ch}\,(x))$$

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = x - \operatorname{th}(x) \qquad f''(x) = \operatorname{th}(x)^2 \geqslant 0$$

Avec $f'(0) = 0$, on en déduit que f croît sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et comme $f(0) = 0$, on conclut avec la parité de f

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{ch}(x) \leqslant \mathrm{e}^{x^2/2}}$$

Exercice 14 (**)

Soit $\alpha \in \,]\,0\,;1\,]$. Établir $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad |x^\alpha - y^\alpha| \leqslant |x-y|^\alpha$

Corrigé : On suppose $x \geqslant y \geqslant 0$. On pose $a = x - y$ et $b = y$ et on suppose a et b non tous nuls. Comme $u^\alpha \geqslant u$ pour $u \in [\,0\,;1\,]$, il vient

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{a+b}\right)^\alpha \geqslant \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$$

d'où
$$a^\alpha + b^\alpha \geqslant (a+b)^\alpha$$

et l'inégalité vaut également si a ou b est nul. Par symétrie des rôles, on conclut

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad |x^\alpha - y^\alpha| \leqslant |x-y|^\alpha}$$

Variante : On suppose $x \geqslant y \geqslant 0$ avec y fixé. On pose

$$\forall x \geqslant y \qquad g(x) = (x-y)^\alpha - x^\alpha + y^\alpha$$

Puis, on fait une étude de fonctions ...

Exercice 15 (***)

Montrer $\qquad \forall x \in [\,0\,;\pi\,] \qquad \sin(x)^2 \leqslant \dfrac{4}{\pi^2}x(\pi - x)$

Corrigé : On pose $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \dfrac{4}{\pi^2}t(\pi - t) - \sin(t)^2$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et il vient par dérivation

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f'(t) = \frac{4}{\pi} - \frac{8}{\pi^2}t - \sin(2t) \qquad f''(t) = -2\left(\frac{4}{\pi^2} + \cos(2t)\right)$$

On en déduit que f'' croît strictement sur $\left[\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right]$. On observe

$$f''(0) = -2\left(\frac{4}{\pi^2} + 1\right) < 0 \quad \text{et} \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right) > 0$$

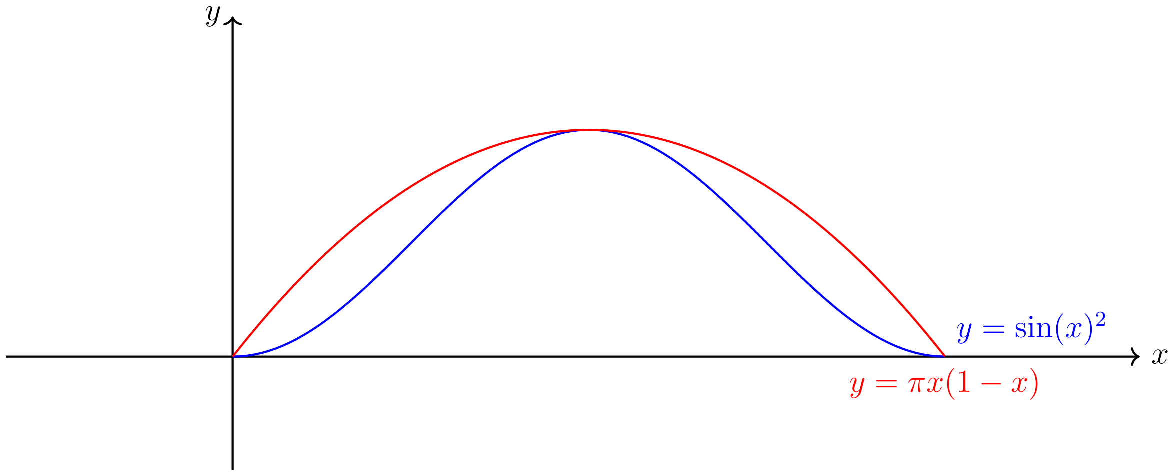
Par conséquent, la fonction f'' réalise une bijection de $\left[\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right]$ sur son image qui contient zéro. Ainsi, il existe $\alpha \in \left]\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right[$ tel que $f''(\alpha) = 0$ et on en déduit le tableau de variation de f' :

t	0		α		$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(t)$	$\dfrac{4}{\pi}$	$\searrow$	$f'(\alpha)$	$\nearrow$	0

On en déduit $f'(\alpha) < 0$ et par conséquent, il un unique existe $\beta \in]\,0\,;\alpha\,[$ tel que $f'(\beta) = 0$ et on a le tableau de variation de f :

t	0	β	$\frac{\pi}{2}$
$f(t)$	0 ↗	$f(\beta)$	↘ 0

On conclut $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \sin(t)^2 \leqslant \frac{4}{\pi} t\,(\pi - t)}$$



Exercice 16 (**)

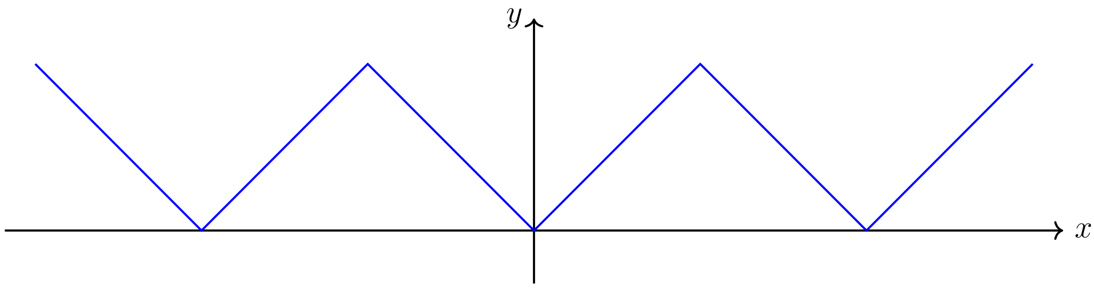
Représenter le graphe de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arccos}\,(\cos(x))$.

Corrigé : On a $$\forall x \in [\,0\,;\pi\,] \qquad \mathrm{Arccos}\,(\cos(x)) = x$$

La fonction est clairement paire d'où

$$\forall x \in [\,-\pi\,;0\,] \qquad \mathrm{Arccos}\,(\cos(x)) = -x$$

et elle est 2π-périodique d'où le graphe



Exercice 17 (***)

Montrer en précisant le domaine de définition

$$|\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{sh}\,(x))| = \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\,(x)}\right)$$

Corrigé : Le domaine de définition de chaque membre est $\mathbb{R}$ tout entier. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f(x) = \text{Arctan}\,(\text{sh}\,(x)) - \text{Arccos}\left(\frac{1}{\text{ch}\,(x)}\right)$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de telles fonctions. Par dérivation, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f'(x) = \frac{\text{ch}\,(x)}{1+\text{sh}\,(x)^2} + \frac{\text{sh}\,(x)}{\text{ch}\,(x)^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\text{ch}\,(x)^2}}} = \frac{\text{ch}\,(x)}{\text{ch}\,(x)^2} + \frac{\text{sh}\,(x)}{\text{ch}\,(x)}\frac{1}{\sqrt{\text{ch}\,(x)^2-1}} = 0$$

Ainsi, la fonction f est constante sur $\mathbb{R}_+$ et $f(0) = 0$. Par parité, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\text{Arctan}\,(\text{sh}\,(x))| = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\text{ch}\,(x)}\right)}$$

Variante : On a pour $x \geqslant 0$

$$\cos(\text{Arctan}\,(\text{sh}\,(x)))^2 = \frac{1}{1+\tan(\text{Arctan}\,(\text{sh}\,(x)))^2} = \frac{1}{1+\text{sh}\,(x)^2} = \frac{1}{\text{ch}\,(x)^2}$$

Puis $$\cos(\text{Arctan}\,(\text{sh}\,(x))) = \frac{1}{\text{ch}\,(x)}$$

et le résultat suit.

Exercice 18 (***)

Résoudre $$\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Corrigé : Posant $x = \dfrac{1}{\tan(\theta)}$ pour $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\smallsetminus \left\{0, -\dfrac{\pi}{4}\right\}$, on a par trigonométrie

$$\begin{aligned}\text{Arctan}\,(\tan(\theta)) + \text{Arctan}\left(\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\right) &= \theta - \text{Arctan}\left(\frac{\sin\,(\theta-\pi/4)}{\cos\,(\theta-\pi/4)}\right)\\ &= \theta - \text{Arctan}\,\tan\,(\theta-\pi/4)\end{aligned}$$

On rappelle que $$\forall u \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\qquad \text{Arctan}\,(\tan(u)) = u$$

et $$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \iff -\frac{3\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$$

L'angle $\theta - \dfrac{\pi}{4}$ sort donc de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Pour $u \in \left]-\dfrac{3\pi}{2}\,;-\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a par π-périodicité de tan

$$\text{Arctan}\,(\tan u) = \text{Arctan}\,(\tan(u+\pi)) = u + \pi$$

Ainsi, on a

$$\text{Arctan}\,(\tan(\theta)) + \text{Arctan}\left(\frac{\cos(\theta)-\sin(\theta)}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} & \text{si } \theta \in \left]-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\smallsetminus \{0\} \\ -\dfrac{3\pi}{4} & \text{si } \theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;-\dfrac{\pi}{4}\right[\end{cases}$$

On conclut $$\boxed{\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4} \iff x \in \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left]0\,;+\infty\right[}$$

Exercice 19 (*)

Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ avec $a\neq b$. Montrer

$$|a|=1 \quad \text{ou} \quad |b|=1 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=1$$

Corrigé : Si $|a|=1$. On a

$$|a-b|=|a|\,|1-a^{-1}b|=|1-\bar{a}b|\neq 0$$

d'où le résultat. Si $|b|=1$, on a

$$|a-b|=\left|\bar{b}\right|\,|a-b|=\left|a\bar{b}-1\right|=\left|1-a\bar{b}\right|$$

Ainsi
$$\boxed{|a|=1 \quad \text{ou} \quad |b|=1 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=1}$$

Exercice 20 (**)

Pour x réel et n entier, linéariser $\cos(x)^n$ puis $\sin(x)^n$.

Corrigé : Soit x réel et n entier. On a

$$\cos(x)^n=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)x}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-n)x}$$

Passant à la partie réelle, on conclut

$$\boxed{\forall(x,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N} \qquad \cos(x)^n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((2k-n)x)}$$

Puis
$$\sin(x)^n=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)=\frac{1}{(2\mathrm{i})^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-2k)x}$$

On distingue selon la parité. On a

$$\sin(x)^{2n}=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}2(n-k)x}$$

et passant à la partie réelle, il vient

$$\boxed{\forall(x,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N} \qquad \sin(x)^{2n}=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k\cos(2(n-k)x)}$$

Enfin, on a
$$\sin(x)^{2n+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}\mathrm{i}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1-2k)x}$$

Passant à la partie réelle, il vient

$$\boxed{\forall(x,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N} \qquad \sin(x)^{2n+1}=\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\sin((2n+1-2k)x)}$$

Exercice 21 (***)

Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Calculer $\mathrm{S}_{n,p} = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{kp\pi}{n+1}\right)$.

Corrigé : Si $p \in 2(n+1)\mathbb{Z}$, on trouve $\mathrm{S}_{n,p} = n$. Supposons $p \notin 2(n+1)\mathbb{Z}$. On a

$$\mathrm{S}_{n,p} = \mathrm{Re}\,(\mathrm{T}_{n,p}) \quad \text{avec} \quad \mathrm{T}_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{ikp\pi}{n+1}}$$

On reconnaît une somme géométrique dans l'expression de $\mathrm{T}_{n,p}$ et il vient

$$\mathrm{T}_{n,p} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p\pi}{n+1}} \frac{1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}np\pi}{n+1}}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p\pi}{n+1}}} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p\pi}{n+1}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\pi}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p\pi}{n+1}}}$$

Si l'entier p est pair, on trouve $\qquad \mathrm{T}_{n,p} = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p\pi}{n+1}} - 1}{1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p\pi}{n+1}}} = -1$

Sinon, on obtient par une factorisation d'angle moitié

$$\mathrm{T}_{n,p} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p\pi}{n+1}} + 1}{1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}p\pi}{n+1}}} = \frac{2\cos\left(\dfrac{p\pi}{2(n+1)}\right)}{-2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{p\pi}{2(n+1)}\right)}$$

On conclut $\qquad \boxed{\forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \qquad \mathrm{S}_{n,p} = \begin{cases} n & \text{si } p \in 2(n+1)\mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } p \in 2\mathbb{Z} \smallsetminus 2(n+1)\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

Exercice 22 (***)

Soit n entier non nul. Montrer que

$$\forall (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n \qquad \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i|$$

et que l'égalité est une inégalité si et seulement si

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \quad | \quad \forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \quad z_i = |z_i|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

Corrigé : On procède par récurrence sur n. Le résultat est trivial pour $n = 1$. Montrons le cas $n = 2$. Si l'un des deux complexes est nul, le résultat est immédiat. Soit $(z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$. Si On a

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z_1} + \bar{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z_1\bar{z_2})$$

On considère l'écriture trigonométrique $z_1 = |z_1|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$ et $z_2 = |z_2|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$ avec θ_1, θ_2 réels. Il vient

$$2\,\mathrm{Re}\,(z_1\bar{z_2}) = 2\,|z_1 z_2|\,\mathrm{Re}\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)} = 2\,|z_1 z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2) \leqslant 2\,|z_1 z_2|$$

avec égalité si et seulement si $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$, c'est-à-dire $\theta_2 \equiv \theta_1\ [2\pi]$. Le résultat suit. On suppose le résultat vrai au rang n entier non nul fixé. Soit $(z_1,\ldots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On pose $\mathrm{Z} = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i$. Il vient d'après le cas pour deux nombres complexes et l'hypothèse de récurrence

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1} z_i\right| = |\mathrm{Z} + z_{n+1}| \leqslant |\mathrm{Z}| + |z_{n+1}| \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|$$

Puis, si l'inégalité est une égalité, on en déduit notamment $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |z_i|$ d'où l'existence de θ réel tel que $z_i = |z_i| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ puis $\mathrm{Z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \sum_{i=1}^{n} |z_i|$ et d'après le cas d'égalité pour deux complexes, il vient $z_{n+1} = |z_{n+1}| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ ce qui clôt la récurrence.

$$\boxed{\text{L'inégalité triangulaire avec cas d'égalité est démontrée.}}$$

Exercice 23 (*)

Calculer
$$\int_0^1 \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : En intégrant par partie, on trouve
$$\int^x \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t = [x \operatorname{Arctan}(x)] - \int^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x \operatorname{Arctan}(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$$

Ainsi
$$\boxed{\int_0^1 \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}}$$

Exercice 24 (**)

Primitive de
$$x \mapsto \sqrt{2x - x^2}$$

Corrigé : On a
$$\int^x \sqrt{2t - t^2}\,\mathrm{d}t = \int^x \sqrt{1 - (t-1)^2}\,\mathrm{d}t$$

On pose $t - 1 = \sin u$ et il vient
$$\begin{aligned}\int^x \sqrt{1-(t-1)^2}\,\mathrm{d}t &= \int^{\operatorname{Arcsin}(x-1)} \cos^2 u\,\mathrm{d}u \\ &= \int^{\operatorname{Arcsin}(x-1)} \frac{1+\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u = \left(\frac{u + \sin u \cos u}{2}\right)^{\operatorname{Arcsin}(x-1)}\end{aligned}$$

De la trigonométrie permet d'obtenir $\cos \operatorname{Arcsin}(x-1) = \sqrt{1-(x-1)^2}$ d'où
$$\boxed{\int^x \sqrt{2t-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\operatorname{Arcsin}(x-1) + (x-1)\sqrt{2x-x^2}\right]}$$

Exercice 25 (***)

Pour $x > 1$ et $y > 1$, on note $\quad \beta(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer $\quad \beta(x,y) = \beta(y,x)$

2. Établir $\quad \beta(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y}\beta(x,y)$

3. En déduire $\quad \beta(x+1,y+1) = \dfrac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x,y)$

Corrigé : Soit $x > 1$ et $y > 1$. Le changement de variable $u = 1 - t$ de classe $\mathscr{C}^1$ donne

$$\beta(x, y) = -\int_1^0 (1-u)^{x-1} u^{y-1} \mathrm{d}u = \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1} \mathrm{d}u$$

Autrement dit $\boxed{\forall x > 1, y > 1 \qquad \beta(x, y) = \beta(y, x)}$

Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto \dfrac{-1}{y}(1-t)^y$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ d'où, par intégration par parties,

$$\beta(x+1, y) = \underbrace{\left[\frac{-1}{y} t^x (1-t)^y\right]_0^1}_{=0} + \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y \, \mathrm{d}t = \frac{x}{y}\beta(x, y+1)$$

d'où $\qquad \forall x > 1, y > 1 \qquad y\beta(x+1, y) = x\beta(x, y+1)$

Par suite

$$\begin{aligned}(x+y)\beta(x+1, y) &= x\left[\beta(x+1, y) + \beta(x, y+1)\right] \\ &= x\int_0^1 \left[t^x(1-t)^{y-1} + t^{x-1}(1-t)^y\right] \, \mathrm{d}t \\ (x+y)\beta(x+1, y) &= x\int_0^1 (1+t-t)t^{x-1}(1-t)^{y-1} \, \mathrm{d}t = x\beta(x, y)\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall x > 1, y > 1 \qquad \beta(x+1, y) = \dfrac{x}{x+y}\beta(x, y)}$

D'après la relation précédemment établie et la symétrie de β, on a

$$\beta(x+1, y+1) = \frac{x}{x+y+1}\beta(x, y+1) = \frac{x}{x+y+1}\beta(y+1, x) = \frac{x}{x+y+1}\frac{y}{x+y}\beta(y, x)$$

On conclut $\boxed{\forall x > 1, y > 1 \qquad \beta(x+1, y+1) = \dfrac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x, y)}$

Exercice 26 (*)

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f, g fonctions majorées de I dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. Montrer

$$\operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{I}} f(x) \leqslant \operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{I}} g(x)$$

Corrigé : On a $\qquad \forall x \in \mathrm{I} \qquad f(x) \leqslant g(x) \leqslant \operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{I}} g(x)$

et par conséquent $\boxed{\operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{I}} f(x) \leqslant \operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{I}} g(x)}$

Exercice 27 (**)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On définit $\mathrm{d}(x, \mathrm{A}) = \inf\{|x-a|, \ a \in \mathrm{A}\}$. Montrer

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |\mathrm{d}(x, \mathrm{A}) - \mathrm{d}(y, \mathrm{A})| \leqslant |x-y|$$

Corrigé : Soit $(x, y, a) \in \mathbb{R}^2 \times \mathrm{A}$. Par inégalité triangulaire, il vient

$$|x-a| \leqslant |x-y| + |y-a|$$

La borne inférieure $\mathrm{d}(x,\mathrm{A})$ minore $|x-a|$ d'où

$$\mathrm{d}(x,\mathrm{A}) \leqslant |x-y| + |y-a|$$

autrement dit $$\mathrm{d}(x,\mathrm{A}) - |x-y| \leqslant |y-a|$$

Cette minoration vaut pour tout $a \in \mathrm{A}$ ce qui signifie que $\mathrm{d}(x,\mathrm{A}) - |x-y|$ est un minorant de $\{|y-a|\,,\ a \in \mathrm{A}\}$ et comme la borne inférieure de cet ensemble est le plus grand des minorants, il vient

$$\mathrm{d}(x,\mathrm{A}) - |x-y| \leqslant \mathrm{d}(y,\mathrm{A})$$

d'où $$\mathrm{d}(x,\mathrm{A}) - \mathrm{d}(y,\mathrm{A}) \leqslant |x-y|$$

Par symétrie des rôles, on conclut

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |\mathrm{d}(x,\mathrm{A}) - \mathrm{d}(y,\mathrm{A})| \leqslant |x-y|}$$

Exercice 28 (***)

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f fonction majorée de I dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \geqslant 0$. Montrer

$$\operatorname*{Sup}_{x\in\mathrm{I}} \lambda f(x) = \lambda \operatorname*{Sup}_{x\in\mathrm{I}} f(x)$$

Corrigé : Soit $x \in \mathrm{I}$. On a $$\lambda f(x) \leqslant \lambda \operatorname*{Sup}_{x\in\mathrm{I}} f(x)$$

puis $$\operatorname*{Sup}_{x\in\mathrm{I}} \lambda f(x) \leqslant \lambda \operatorname*{Sup}_{x\in\mathrm{I}} f(x)$$

Montrons l'inégalité dans l'autre sens. Elle est immédiate si $\lambda = 0$. Supposons $\lambda > 0$. Il vient, en appliquant l'inégalité précédemment obtenue

$$\operatorname*{Sup}_{x\in\mathrm{I}} f(x) = \operatorname*{Sup}_{x\in\mathrm{I}} \frac{1}{\lambda}\lambda f(x) \leqslant \frac{1}{\lambda} \operatorname*{Sup}_{x\in\mathrm{I}} \lambda f(x)$$

d'où $$\lambda \operatorname*{Sup}_{x\in\mathrm{I}} f(x) \leqslant \operatorname*{Sup}_{x\in\mathrm{I}} \lambda f(x)$$

On conclut $$\boxed{\operatorname*{Sup}_{x\in\mathrm{I}} \lambda f(x) = \lambda \operatorname*{Sup}_{x\in\mathrm{I}} f(x)}$$

Exercice 29 (*)

Résoudre $$\cos(x)y' + \sin(x)y = \sin^2(x) \qquad \text{sur} \qquad \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$$

Corrigé : L'espace des solutions de l'équation homogène est clairement $\mathrm{Vect}\,(\cos)$. Par variation de la constante, on obtient

$$\lambda'(x)\cos^2 x = \sin^2 x \iff \lambda'(x) = \tan^2 x \iff \lambda(x) = \tan x - x + \alpha$$

Ainsi, on trouve $$\boxed{\{x \mapsto \sin x - x\cos x + \alpha\cos x, \alpha \in \mathbb{R}\}}$$

Exercice 30 (*)

Résoudre $$\sqrt{1-x^2}y' + y = 1 \qquad \text{sur} \qquad]-1\,;1[$$

Corrigé : La solution constante $x \mapsto 1$ est clairement une solution particulière. On trouve

$$\boxed{\left\{x \mapsto 1 + \lambda \mathrm{e}^{-\operatorname{Arcsin} x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

Exercice 31 (*)

Soient u, v dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, non identiquement nulles, vérifiant

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad u''(x)v(y)+u(x)v''(y)=0$$

1. Montrer qu'il existe λ réel tel que u et v soient solutions respectives de

$$z''+\lambda z=0 \quad \text{et} \quad z''-\lambda z=0$$

2. Déterminer, en fonction de λ, la forme des fonctions u et v.

Corrigé : 1. Comme $v\neq 0$, il existe y_0 réel tel que $v(y_0)\neq 0$. Par conséquent

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad u''(x)+\lambda u(x)=0 \quad \text{avec} \quad \lambda=\frac{v''(y_0)}{v(y_0)}$$

Puis, comme $u\neq 0$, il existe x_0 réel tel que $u(x_0)\neq 0$ et par suite

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad v''(x)+\mu v(x)=0 \quad \text{avec} \quad \mu=\frac{u''(x_0)}{u(x_0)}$$

Enfin, en évaluant la relation initiale en (x_0,y_0), on obtient

$$\lambda+\mu=0$$

On conclut $\boxed{\exists\lambda\in\mathbb{R} \quad | \quad u''+\lambda u=0 \quad \text{et} \quad v''-\lambda v=0}$

2. Il existe a,b,c,d réels tels que

$$\boxed{\begin{array}{llll} \text{Si } \lambda=0 & \forall t\in\mathbb{R} & u(t)=a+bt & v(t)=c+dt \\ \text{Si } \lambda>0 & \forall t\in\mathbb{R} & u(t)=a\cos(\sqrt{\lambda}t)+b\sin(\sqrt{\lambda}t) & v(t)=c\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}t}+d\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}t} \\ \text{Si } \lambda<0 & \forall t\in\mathbb{R} & u(t)=a\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}t}+b\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}t} & v(t)=c\cos(\sqrt{-\lambda}t)+d\sin(\sqrt{-\lambda}t) \end{array}}$$

Exercice 32 (**)

Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad f'(x)+f(-x)=\mathrm{e}^x \tag{E}$$

Corrigé : Soit f solution de (E). On a $f'(x)=-f(-x)+\mathrm{e}^x$ pour x réel d'où f' dérivable. Par dérivation, il vient

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad f''(x)-f'(-x)=\mathrm{e}^x$$

En substituant x par $-x$ dans la relation de départ, on a $f'(-x)+f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ pour x réel d'où

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad f''(x)+f(x)=2\,\mathrm{ch}\,(x)$$

Ainsi, il existe α, β réels tels que

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad f(x)=\mathrm{ch}\,(x)+\alpha\cos(x)+\beta\sin(x)$$

Réciproquement, on injecte dans l'équation (E) et on obtient

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad (\alpha+\beta)(\cos(x)-\sin(x))=0 \quad\Longrightarrow\quad \alpha+\beta=0$$

Finalement $\boxed{\mathrm{S_E}=\{x\mapsto \mathrm{ch}\,(x)+\alpha(\cos(x)-\sin(x)),\ \alpha\in\mathbb{R}\}}$

Remarque : La forme de $\mathrm{S_E}$ était en partie prévisible. En effet, il s'agit de résoudre une équation du type $\Phi(f)=\exp$ avec $\Phi: f\mapsto(x\mapsto f'(x)+f(-x))$ et on peut établir, en suivant la même trame que dans la résolution ci-avant, que le noyau $\mathrm{Ker}\ \Phi$ est une droite vectorielle.

Exercice 33 (***)

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall x \geqslant 0 \qquad |f'(x) + f(x)| \leqslant 1$$

Montrer $\qquad \forall x \geqslant 0 \qquad |f(x) - \mathrm{e}^{-x} f(0)| \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-x}$

Corrigé : Notons $g = f' + f$ et considérons cette relation comme une équation différentielle. On en déduit après variation de la constante une expression de f en fonction de g avec

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) = \alpha \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^t g(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

d'où $\qquad \forall x \geqslant 0 \qquad f(x) - \mathrm{e}^{-x} f(0) = \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^t g(t)\, \mathrm{d}t$

et par inégalité triangulaire, en utilisant $|g(t)| \leqslant 1$ pour tout $t \geqslant 0$

$$\forall x \geqslant 0 \qquad |f(x) - \mathrm{e}^{-x} f(0)| \leqslant \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^t \,|g(t)|\, \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t$$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad |f(x) - \mathrm{e}^{-x} f(0)| \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-x}}$

Exercice 34 (*)

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{k + n^2}$ pour n entier.

Corrigé : On a $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \geqslant \dfrac{1}{n + n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n}{3}$

D'où $\qquad \boxed{u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty}$

Exercice 35 (*)

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^2}$ pour n entier non nul.

Corrigé : Pour n entier non nul, on a $\ln(n!) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln k \leqslant n \ln n$ et par croissances comparées, on conclut

$$\boxed{\frac{\ln(n!)}{n^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0}$$

Exercice 36 (**)

Déterminer une expression du terme général de la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_0 \text{ réel} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = a u_n + b n \quad \text{avec} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Corrigé : Si $a = 0$, le résultat est immédiat. Si $b = 0$, le résultat est immédiat aussi avec $u_n = a^n u_0$ pour tout n entier. Considérons a et b non nuls et posons $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout n entier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = u_{n+1} - u_n = au_n + bn - (au_{n-1} + b(n-1))$$
$$= a(u_n - u_{n-1}) + b = av_{n-1} + b$$

Ainsi, la suite $(v_n)_n$ est arithmético-géométrique. Par ailleurs, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} [u_{k+1} - u_k] = u_n - u_0$$

donc expliciter la suite $(v_n)_n$ permet d'expliciter la suite $(u_n)_n$. Si $a = 1$, on a $v_n = v_0 + nb = nb$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} v_k = u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} kb$$

D'où $$\boxed{\text{Si } a = 1, \text{ on a } u_n = u_0 + b\frac{n(n-1)}{2} \text{ pour tout } n \text{ entier.}}$$

Si $a \neq 1$, on a $v_n = \alpha + a^n(v_0 - \alpha)$ avec $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$ puis

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} v_k = u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\alpha + a^k(v_0 - \alpha)\right] = n\alpha + \frac{1-a^n}{1-a}(v_0 - \alpha)$$

et $v_0 = u_1 - u_0 = (a-1)u_0 + b$. Ainsi

$$\boxed{\text{Si } a \neq 1, \text{ on a } u_n = u_0 + n\alpha + a^n \left(u_0 - \frac{a\alpha}{a-1}\right) \text{ pour tout } n \text{ entier.}}$$

Exercice 37 (**)

Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

Corrigé : Avec l'inégalité de concavité $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x > -1$, on trouve

$$\forall n \geqslant 2 \qquad u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant 0$$

et $$\forall n \geqslant 1 \qquad v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0$$

et $$\forall n \geqslant 1 \qquad u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

D'après le théorème des suites adjacentes, on conclut que

$$\boxed{\text{Les suites } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ et } (v_n)_{n\geqslant 1} \text{ sont adjacentes donc convergentes vers une même limite.}}$$

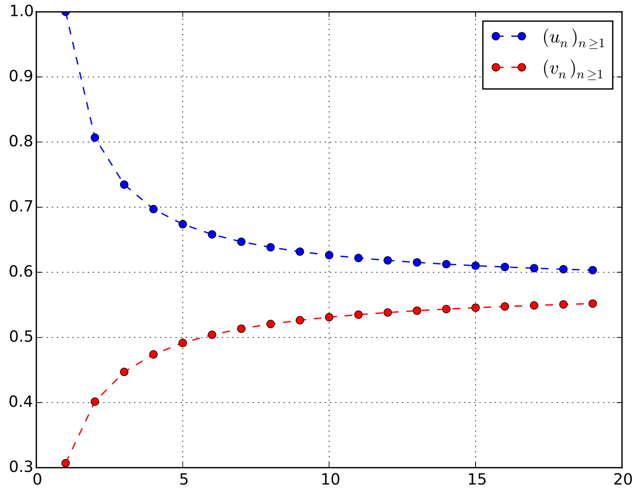


FIGURE 1 – Tracé des $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$

Exercice 38 (*)

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ pour n entier.

Corrigé : Par récurrence immédiate, on a $u_n > 0$ pour tout n entier. On a $\ln(1 + x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$ par concavité d'où $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour n entier donc la suite $(u_n)_n$ décroît et est minorée donc convergente par limite monotone. Comme $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur l'intervalle fermé $\mathbb{R}_+$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est nécessairement point fixe de f et on a $f(x) = x \iff x = 0$. On conclut

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

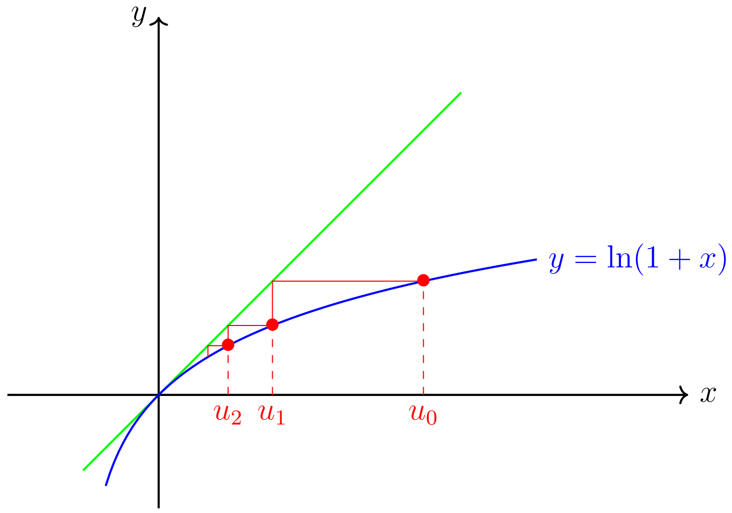


FIGURE 2 – Graphe de la suite $(u_n)_n$

Exercice 39 (***)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\qquad \forall x \geqslant 0 \qquad f_n(x) = -1 + \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$

1. Montrer $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \exists! x_n \geqslant 0 \quad | \quad f_n(x_n) = 0$

2. Justifier $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad x_n \geqslant \dfrac{1}{2}$

3. Étudier la convergence de $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. La fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions strictement croissantes et $f_n(0) = -1$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ d'où f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[-1\,;+\infty[$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \quad \exists! x_n \geqslant 0 \quad | \quad f_n(x_n) = 0}$$

2. Soit n entier non nul. On a

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = -1 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$$

D'où $$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad x_n \geqslant \frac{1}{2}}$$

3. Soit n entier non nul. On a clairement $f_n \leqslant f_{n+1}$ d'où

$$f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \leqslant f_{n+1}(x_n)$$

Par croissance stricte de f_{n+1}, il s'ensuit que $x_{n+1} \leqslant x_n$ autrement dit

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_n \text{ décroît.}}$$

Par théorème de convergence monotone, il s'ensuit que $(x_n)_n$ converge.

On a $f_2(x) = -1 + x + x^2$ donc l'unique racine positive est $\varphi = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$ d'où $x_n \leqslant \varphi$ pour tout $n \geqslant 2$ puis

$$f_n(x_n) = 0 \iff -1 + \sum_{k=1}^{n} x_n^k = 0 \iff -1 + x_n\frac{1-x_n^n}{1-x_n} = 0 \iff x_n = \frac{1}{2} + \frac{x_n^{n+1}}{2}$$

Comme $0 \leqslant x_n \leqslant \varphi < 1$ pour tout $n \geqslant 2$, il s'ensuit

$$\boxed{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}}$$

Remarque : En montrant que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ décroît strictement puisque $f_n < f_{n+1}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ pour tout n entier non nul, on a $x_n < x_1 = 1$ pour tout $n \geqslant 2$ ce qui évite de résoudre $f_2(x) = 0$.

Exercice 40 (***)

Soient λ_1, …, λ_r dans $\mathbb{U}$ deux à deux distincts et α_1, …, α_r dans $\mathbb{C}^*$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \lambda_i^n$$

Montrer $$u_n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Corrigé : Supposons $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On a pour n entier

$$\forall k \in [\![0\,;\, r-1]\!] \qquad u_{n+k} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \lambda_i^k \times \lambda_i^n$$

d'où
$$\begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n+r-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \dots & \alpha_r \\ \alpha_1\lambda_1 & \dots & \dots & \alpha_r\lambda_r \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1\lambda_1^{r-1} & \dots & \dots & \alpha_r\lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}} \begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_r^n \end{pmatrix}$$

et
$$\det \mathrm{A} = \left(\prod_{i=1}^{r} \alpha_i\right) \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

Ainsi
$$\begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ \vdots \\ \lambda_r^n \end{pmatrix} = \mathrm{A}^{-1} \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+r-1} \end{pmatrix}$$

Chaque λ_k^n est combinaison linéaire de suites de limites nulles puisque $u_{n+k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour tout $k \in [\![0\,;\, r-1]\!]$ et il s'ensuit

$$\forall k \in [\![1\,;\, r]\!] \qquad \lambda_k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ce qui est absurde puisque $\lambda_k \in \mathbb{U}$ pour tout $k \in [\![1\,;\, r]\!]$. On conclut

$$\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0}$$

Exercice 41 (***)

Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer qu'il existe une suite extraite de suite $(z^n)_n$ qui tend vers 1.

Corrigé : On appelle *extractrice* une injection strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. La suite $(z^n)_n$ est à valeurs dans $\mathbb{U}$ partie bornée de $\mathbb{C}$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on dispose de φ extractrice telle que $\left(z^{\varphi(n)}\right)_n$ converge et par continuité du module, on a

$$z^{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{avec} \quad \theta \text{ réel}$$

On définit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $\psi(0) = \varphi(0)$ puis $\psi(n+1) = \varphi(2\psi(n)+1)$ pour n entier. Avec ce choix, on observe

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \psi(n+2) - \psi(n+1) - (\psi(n+1) - \psi(n)) = \underbrace{\psi(n+2) - 2\psi(n+1)}_{\geqslant 1} + \psi(n) > \psi(n)$$

Ainsi, la suite $(\psi(n+1) - \psi(n))_n$ est une extractrice vérifiant $\psi(n+1) - \psi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ avec $(\psi(n))_n$ sous-suite de $(\varphi(n))_n$. Il vient

$$z^{\psi(n+1)-\psi(n)} = z^{\psi(n+1)}\overline{z^{\psi}(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = 1$$

On conclut $\boxed{\text{La suite } (z^n)_n \text{ admet une suite extraite qui tend vers 1.}}$

Exercice 42 (**)

Soit la matrice J de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de 1.

1. Calculer J^2.
2. En déduire que $I_n + J$ est inversible et préciser son inverse.

Corrigé : 1. On trouve $\boxed{J^2 = nJ}$

2. On note $A = I_n + J$ d'où $J = A - I_n$. On a

$$A^2 = I_n + 2J + J^2 = I_n + (n+2)J = I_n + (n+2)(A - I_n) \iff A^2 - (n+2)A = (n+1)I_n$$

On conclut $\boxed{\text{La matrice A est inversible d'inverse } A^{-1} = \dfrac{1}{n+1}(A - (n+2)I_n).}$

Exercice 43 (**)

Soient $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = XY^\top$. Déterminer une expression simple de M^p avec p entier.

Corrigé : Par associativité du produit matriciel, il vient

$$M^2 = X\left(Y^\top X\right)Y^\top = \alpha M \quad \text{avec} \quad \alpha = Y^\top X = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Par récurrence immédiate, on conclut

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad M^p = \alpha^{p-1} M}$$

Exercice 44 (**)

Soit $V = \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n+1} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$. Calculer $V\bar{V}$. En déduire l'inversibilité de la matrice V et préciser son inverse.

Corrigé : Soit $(k, \ell) \in [\![1 \,;\, n+1]\!]^2$. On a

$$\left(V\bar{V}\right)_{k,\ell} = \sum_{j=1}^{n+1} \omega^{(k-1)(j-1)} \omega^{-(j-1)(\ell-1)} = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\omega^{k-\ell}\right)^{j-1}$$

C'est une somme de racines de l'unité et en distinguant les cas, on trouve

$$\left(V\bar{V}\right)_{k,\ell} = \begin{cases} n+1 & \text{si } k = \ell \\ \dfrac{1 - \omega^{(n+1)(k-\ell)}}{1 - \omega^{k-\ell}} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On conclut $\boxed{V\bar{V} = (n+1)I_{n+1}}$

Exercice 45 (*)

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{rg} M = 1$. Montrer qu'il existe X et Y des matrices colonnes non nulles telles que $M = XY^\top$.

Corrigé : Il existe une colonne X de M non nulle. Toutes les autres colonnes de M sont colinéaires à celle-ci d'où $M = (y_1 X| \ldots |y_n X) = XY^\top$ avec Y dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \neq 0$ puisque l'un des y_j vaut 1. On conclut

$$\boxed{\text{Il existe X et Y des matrices colonnes non nulles telles que } M = XY^\top.}$$

Exercice 46 (**)

Soit n entier non nul. Une matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *nilpotente* s'il existe p entier non nul tel que $\mathrm{M}^p = 0$. Soient $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ avec B nilpotente et $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$. Montrer

$$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

Corrigé : On suppose $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$. Soit p entier non nul tel que $\mathrm{B}^p = 0$. D'après la factorisation de Bernoulli, on a

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n^p - (-\mathrm{B})^p = (\mathrm{I}_n + \mathrm{B}) \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{B}^k$$

ce qui prouve l'inversibilité de $\mathrm{I}_n + \mathrm{B}$. Supposons $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{A}(\mathrm{I}_n + \mathrm{B}') \quad \text{avec} \quad \mathrm{B}' = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$$

On a $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ d'où $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} = \mathrm{BA}^{-1}$ et il s'ensuit $(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B})^p = \mathrm{A}^{-p}\mathrm{B}^p = 0$. Ainsi, d'après le premier résultat, on a $\mathrm{I}_n + \mathrm{B}' \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ d'où $\mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Supposons $\mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. D'après le sens direct, on a $\mathrm{A} = \mathrm{A} + \mathrm{B} + (-\mathrm{B}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})}$$

Exercice 47 (**)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

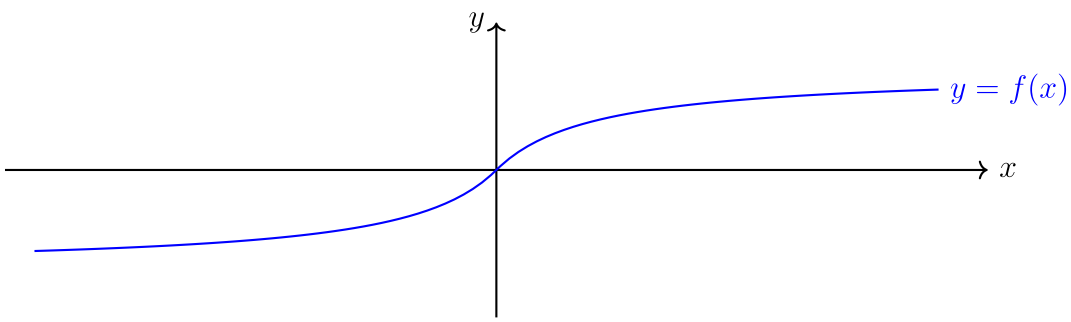
1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;1\,[$.
2. Expliciter la réciproque f^{-1}.

Corrigé : 1. Pour x réel, on a clairement $|f(x)| < 1$. Puis

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad \forall x \leqslant 0 \qquad f(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$$

On en déduit que f croît strictement sur $\mathbb{R}$ avec $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$. Par conséquent

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]-1\,;1\,[.}$$



2. Soit x réel et $y \in \,]-1\,;1\,[$. On résout

$$y = f(x) \iff y = \frac{x}{1+|x|} \iff \begin{cases} x = (1+|x|)y \\ |x|\,(1-|y|) = |y| \end{cases} \iff x = \frac{y}{1-|y|}$$

$$\boxed{\forall y \in \,]-1\,;1\,[\qquad f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}}$$

Exercice 48 (***)

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. Montrer

$$f \text{ bijective} \iff \forall \mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) \qquad f(\mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{A}) = \mathrm{F} \smallsetminus f(\mathrm{A})$$

Corrigé : Montrons le sens indirect. Pour $\mathrm{A} = \varnothing$, on obtient $f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$ d'où f surjective. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ avec $x \neq y$. On a $f(y) \in f(\mathrm{E} \smallsetminus \{x\}) = \mathrm{F} \smallsetminus \{f(x)\}$ d'où $f(y) \neq f(x)$. Supposons f bijective. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$ et $y \in f(\mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{A})$. On a $y = f(x)$ avec $x \notin \mathrm{A}$. Si $f(x) \in f(\mathrm{A})$, alors $f(x) = f(a)$ avec $a \in \mathrm{A}$ et l'injectivité de f implique $x = a \in \mathrm{A}$ ce qui est exclu. Par suite, on a $f(x) \in \mathrm{F} \smallsetminus f(\mathrm{A})$. Soit $f \in \mathrm{F} \smallsetminus f(\mathrm{A})$. Par surjectivité, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$. Comme $f(x) \notin f(\mathrm{A})$, il s'ensuit que $x \notin \mathrm{A}$ d'où $x \in f(\mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{A})$. On conclut

$$\boxed{f \text{ bijective} \iff \forall \mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) \qquad f(\mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{A}) = \mathrm{F} \smallsetminus f(\mathrm{A})}$$

Exercice 49 (***)

On définit $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ par

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \pi(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$$

1. Justifier que π est définie de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.
2. Montrer
$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \pi(m, n+1) = \pi(m+1, n) + 1 \quad \text{et} \quad \pi(n+1, 0) = \pi(0, n) + 1$$
En déduire que π est surjective.
3. Montrer
$$\forall (m, n, m', n') \in \mathbb{N}^4 \qquad m' + n' \geqslant m + n + 1 \quad \Longrightarrow \quad \pi(m', n') > \pi(m, n)$$
En déduire l'injectivité de π.

Corrigé : 1. Les entiers $m + n$ et $m + n + 1$ sont consécutifs donc l'un d'eux est pair et par conséquent

$$\boxed{\text{L'application } \pi \text{ est bien définie de } \mathbb{N}^2 \text{ sur } \mathbb{N}.}$$

Variante : On observe que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \pi(m, n) = n + \sum_{k=1}^{m+n} k \in \mathbb{N}$$

2. On a $\pi(0, 0) = 0$ d'où $0 \in \operatorname{Im} \pi$. On vérifie sans peine les relations demandées. Puis, pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on observe

$$\pi(m, n) + 1 = \begin{cases} \pi(n+1, 0) & \text{si } m = 0 \\ \pi(m-1, n+1) & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où $\pi(m, n) + 1 \in \operatorname{Im} \pi$. Ainsi, l'ensemble $\operatorname{Im} \pi$ et une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et qui vérifie le principe de récurrence et on conclut

$$\boxed{\operatorname{Im} \pi = \mathbb{N}}$$

3. Soient (m, n) et (m', n') dans $\mathbb{N}^2$ avec $(m, n) \neq (m', n')$. Si $m' + n' \geqslant m + n + 1$, il vient

$$\begin{aligned} \pi(m', n') = \frac{(m'+n')(m'+n'+1)}{2} + n' &\geqslant \frac{(m+n+1)(m+n+2)}{2} + n' \\ &\geqslant \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n + m + 1 + n' > \pi(m, n) \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\qquad m'+n' > m+n \implies \pi(m',n') > \pi(m,n)$

Par symétrie des rôles, on en déduit

$$m+n \neq m'+n' \implies \pi(m,n) \neq \pi(m',n')$$

Supposons $(m,n) \neq (m',n')$. Si $m+n = m'+n'$, alors $n \neq n'$ d'où $\pi(m,n) \neq \pi(m',n')$ et sinon on a également $\pi(m',n') \neq \pi(m,n)$ d'après l'implication précédente. Dans tous les cas, on a donc

$$(m,n) \neq (m',n') \implies \pi(m,n) \neq \pi(m',n')$$

Ainsi $\qquad \boxed{\text{L'application } \pi \text{ est une injection de } \mathbb{N}^2 \text{ sur } \mathbb{N}.}$

Variante : Pour montrer l'inégalité demandée, on peut aussi écrire

$$\pi(m',n') = n' + \sum_{k=1}^{m'+n'} k \geqslant n' + \sum_{k=1}^{m+n+1} k = m+1+n'+n+\sum_{k=1}^{m+n} k = m+1+n'+\pi(m,n)$$

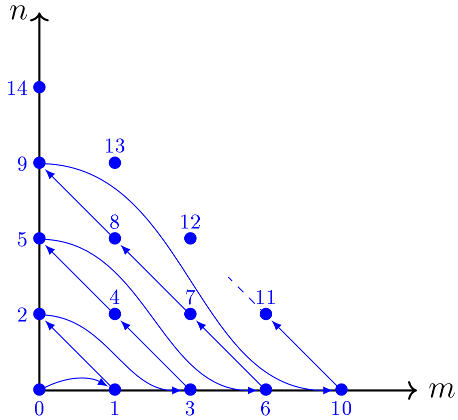


FIGURE 3 – Parcours de $\mathbb{N}^2$ par π

Exercice 50 (*)

Montrer $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 5 \text{ divise } 2^{3n+5} + 3^{n+1}$

Corrigé : Soit n entier. On a

$$2^{3n+5} + 3^{n+1} \equiv 2^5(2^3)^n + 3^{n+1} \equiv 2 \times 3^n + 3 \times 3^n \equiv 0 \ [5]$$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad 5 \text{ divise } 2^{3n+5} + 3^{n+1}}$

Exercice 51 (**)

Pour n entier non nul, on note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n. Établir l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=1}^{n} \tau(k) = \sum_{d=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$$

Corrigé : Soit n entier non nul. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{d|k} 1 \right)$$

Comme les sommes sont finies, on peut intervertir l'ordre de sommation. Le plus grand diviseur de n étant n lui-même, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = \sum_{d=1}^{n} \left(\sum_{k \in [\![1\,;\,n]\!],\ d|k} 1 \right)$$

La somme intérieure ci-dessus compte le nombre de multiples de d dans $[\![1\,;\,n]\!]$ qui sont

$$d, 2d, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor d$$

Par conséquent $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=1}^{n} \tau(k) = \sum_{d=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}$

Variante rédactionnelle

$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_k}(\ell) = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_k}(\ell)$$

Exercice 52 (**)

Soient a et p des entiers supérieurs à 2.
Montrer que si $a^p - 1$ est premier, alors $a = 2$ et p est premier.

Corrigé : Supposons $p = q\ell$ avec q et ℓ des entiers $\geqslant 2$. D'après l'identité de Bernoulli, il vient

$$a^p - 1 = (a^q)^\ell - 1 = (a^q - 1)\sum_{k=0}^{\ell-1} a^{qk}$$

ce qui contredit la primalité de $a^p - 1$. on en déduit que p est premier. Puis, on factorise

$$a^p - 1 = (a-1)\sum_{k=0}^{p-1} a^k$$

On a $a - 1 < a^p - 1$ et comme $a^p - 1$ est premier, il s'ensuit $a - 1 = 1$ et on conclut

$$\boxed{a^p - 1 \text{ premier} \quad \Longrightarrow \quad a = 2 \quad \text{et} \quad p \text{ premier}}$$

Remarque : Les nombres premiers de la forme $2^p - 1$ sont appelés *nombres premiers de Mersenne.*

Exercice 53 (**)

Soient a, b dans $\mathbb{Z}$. Établir l'égalité $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$ sans utiliser la décomposition de a et b en facteurs premiers.

Corrigé : L'égalité a clairement lieu si a ou b est nul. On suppose a et b non nuls. On note $d = a \wedge b$. On dispose de a', b' dans $\mathbb{Z}$, premiers entre eux tels que $a = a'd$, $b = b'd$ avec $a' \wedge b' = 1$. On pose $c = a'b'd$. On a $a|c$ et $b|c$ d'où $a \vee b|c$. Puis, on dispose de k, ℓ dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$a \vee b = ak = a'dk \quad \text{et} \quad a \vee b = b\ell = b'd\ell$$

et de u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $a'u + b'v = 1$. Ainsi, il vient

$$a \vee b = (a \vee b)(a'u + b'v) = b'd\ell a'u + a'dkb'v = c(\ell u + kv)$$

ce qui prouve $c|a \vee b$. Par conséquent, les entiers $a \vee b$ et c sont associés et unitaires donc égaux.

Ainsi, on obtient $(a \wedge b)(a \vee b) = dc = da'b'd$

On conclut $\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \qquad (a \wedge b)(a \vee b) = ab}$

Exercice 54 (*)

Déterminer
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\operatorname{Arctan}(x)} - \frac{2x}{\pi}$$

Corrigé : Soit $x > 0$. On a
$$\frac{x}{\operatorname{Arctan}(x)} - \frac{2x}{\pi} = x\frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)}{\frac{\pi}{2}\operatorname{Arctan}(x)} = \frac{x\operatorname{Arctan}(1/x)}{\frac{\pi}{2}\operatorname{Arctan}(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\pi/2)^2}$$

Ainsi
$$\boxed{\frac{x}{\operatorname{Arctan}(x)} - \frac{2x}{\pi} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{4}{\pi^2}}$$

Exercice 55 (***)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b réels pour que $f : t \mapsto a\cos(t) + b\sin(t)$ ait une limite en $+\infty$.

Corrigé : Soient a, b réels non tous nuls et t réel. On a
$$a\cos(t) + b\sin(t) = \sqrt{a^2+b^2}\,[\alpha\cos(t) + \beta\sin(t)] \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
Comme $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, il existe θ réel tel que $\alpha = \cos(\theta)$ et $\beta = \sin(\theta)$. Ainsi
$$a\cos(t) + b\sin(t) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(t-\theta)$$
Si a, b sont non tous nuls, avec l'expression précédemment obtenue, comme la fonction cos n'admet pas de limite en $+\infty$, alors la fonction f non plus. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet une limite en } +\infty \text{ si et seulement si } a = b = 0.}$$

Exercice 56 (**)

Soit n entier non nul. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} [\ln(x+k+1) - \ln(k+1)]$.

Corrigé : Soit $x > 0$. On a
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} [\ln(x+k+1) - \ln(k+1)] &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left[\ln x + \ln\left(1 + \frac{k+1}{x}\right) - \ln(k+1)\right] \\ &= (\ln x)(1-1)^n + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\ln\left(1 + \frac{k+1}{x}\right) - \ln(k+1)\right)\end{aligned}$$

On conclut
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} [\ln(x+k+1) - \ln(k+1)] \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \ln(k+1)}$$

Exercice 57 (**)

Trouver toutes les application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en zéro vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(2x) = f(x)$$

Corrigé : Par récurrence immédiate, on montre
$$\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \qquad f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

et par continuité de f en zéro $\qquad f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = f(0)}$

Exercice 58 (***)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |f(x) - f(y)| = |x - y|$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |f(x) + f(y)| = |x + y|$

Corrigé : 1. Notons $a = f(0)$. Il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |f(x) - a| = |x|$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car 1-lipschitzienne d'où $x \mapsto |f(x) - a|$ de signe constant sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$. Par conséquent, la fonction $f - a$ est soit id, soit $-\mathrm{id}$, soit $x \mapsto |x|$, soit $x \mapsto -|x|$. La condition sur f impose que celle-ci soit injective et donc $f - a$ également. Ainsi,

$$f = a + \mathrm{id} \quad \text{ou} \quad f = a - \mathrm{id} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}$$

Réciproquement, de telles fonctions sont clairement solutions.

$$\boxed{\text{Les fonctions solutions sont de la forme } a + \mathrm{id} \text{ ou } a - \mathrm{id} \text{ avec } a \text{ réel.}}$$

2. Pour $y = -x$, on obtient $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |f(x) + f(-x)| = 0$

Ainsi, la fonction f est impaire et par suite, en prenant $-y$ pour y, il vient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |f(x) + f(-y)| = |f(x) - f(y)| = |x - y|$$

La fonction f est donc solution de l'équation de la première question. Comme f est impaire, on a également $f(0) = 0$ d'où $f = \mathrm{id}$ ou $-\mathrm{id}$. Réciproquement, de telles fonctions sont solutions.

Ainsi $\qquad \boxed{\text{Les fonctions solutions sont } \mathrm{id} \text{ et } -\mathrm{id}.}$

Exercice 59 (***)

On pose $\qquad \forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \,]\,0\,;1\,] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Justifier que la fonction f est continue sur $[\,0\,;1\,]$.
2. La fonction $g : x \in [\,0\,;1\,] \mapsto \lfloor f(x) \rfloor$ est-elle continue par morceaux sur $[\,0\,;1\,]$?

Corrigé : 1. La fonction f est continue sur $]\,0\,;1\,]$ comme composée de telles fonctions et on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(1)\mathrm{O}(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Ainsi $\qquad \boxed{f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})}$

2. La fonction g est bien définie sur $[\,0\,;1\,]$. On a

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{(2k+1)\pi}\,; \dfrac{1}{2k\pi}\right] \\ -1 & \text{si } x \in \left]\dfrac{1}{2(k+1)\pi}\,; \dfrac{1}{(2k+1)\pi}\right[\end{cases}$$

Ainsi, la fonction g admet une infinité de discontinuités sur le segment $[\,0\,;1\,]$.

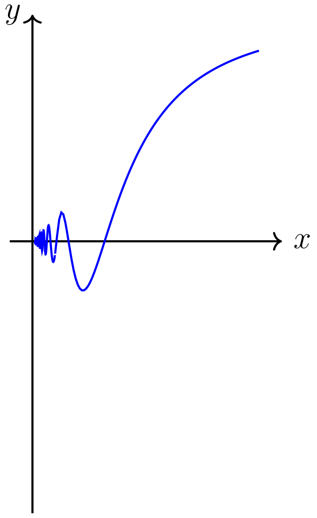


FIGURE 4 – Graphe $y = f(x)$

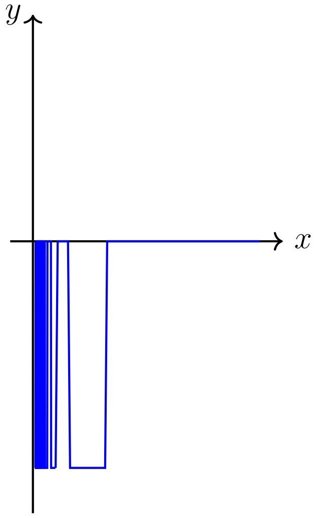


FIGURE 5 – Graphe $y = g(x)$

Il n'existe donc pas de subdivision de $[\,0\,;1\,]$ adaptée à g et on conclut

$$\boxed{g \notin \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;1\,],\mathbb{R})}$$

Remarque : Cet exemple illustre le fait que la composée d'une fonction continue par morceaux avec une fonction continue n'est pas nécessairement continue par morceaux.

Exercice 60 (*)

Soit $(\mathrm{G},\times)$ un groupe et $\mathrm{Z(G)} = \{x \in \mathrm{G} \mid \forall g \in \mathrm{G} \quad xg = gx\}$ son *centre*. Soit φ un morphisme surjectif de G sur G. Montrer

$$\varphi(\mathrm{Z(G)}) \subset \mathrm{Z(G)}$$

Corrigé : Soit $x \in \mathrm{Z(G)}$ et $y \in \mathrm{G}$. Par surjectivité de φ, il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $y = \varphi(g)$ d'où

$$\varphi(x)y = \varphi(x)\varphi(g) = \varphi(xg) = \varphi(gx) = \varphi(g)\varphi(x) = y\varphi(x)$$

Autrement dit $\qquad \forall x \in \mathrm{Z(G)} \qquad \varphi(x) \in \mathrm{Z(G)}$

Ainsi $\qquad \boxed{\varphi(\mathrm{Z(G)}) \subset \mathrm{Z(G)}}$

Exercice 61 (**)

Soit $(\mathrm{G},\star)$ un groupe.

1. Montrer qu'une union de deux sous-groupes de $(\mathrm{G},\star)$ est un sous-groupe si et seulement si l'un contient l'autre.
2. Le résultat se généralise-t-il à plus de deux sous-groupes ?

Corrigé : 1. Soit G un groupe et H_1, H_2 deux sous-groupes. Supposons qu'il existe $a \in \mathrm{H}_1 \smallsetminus \mathrm{H}_2$. Soit $b \in \mathrm{H}_2$. On a $a \star b \in \mathrm{H}_1 \cup \mathrm{H}_2$, autrement dit $a \star b \in \mathrm{H}_1$ ou $a \star b \in \mathrm{H}_2$. Si $a \star b \in \mathrm{H}_2$, alors $(a\star b)\star b^{-1} = a \in \mathrm{H}_2$ ce qui est exclu. Il s'ensuit que $a\star b \in \mathrm{H}_1$ et par suite $a^{-1}\star(a\star b) = b \in \mathrm{H}_1$ ce qui prouve $\mathrm{H}_2 \subset \mathrm{H}_1$. Si un tel a n'existe pas, alors $\mathrm{H}_1 \subset \mathrm{H}_2$. On conclut

$$\boxed{\text{Une union de deux sous-groupes est un sous-groupe si et seulement si l'un contient l'autre.}}$$

2. En fait, non ! On a pour la loi multiplicative

$$(\pm 1, \pm 1) = (\pm 1, 1) \cup (1, \pm 1) \cup \pm(1,1)$$

et aucun des sous-groupes exhibés ne contient les autres. Ainsi

$$\boxed{\text{Le résultat ne se généralise pas à plus de deux sous-groupes.}}$$

Remarques : (a) Si on connaît les groupes quotients, on peut considérer :

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle(1,0)\rangle \cup \langle(0,1)\rangle \cup \langle(1,1)\rangle$$

(b) Il faut chercher un contre-exemple de groupe qui ne soit pas cyclique car un sous-groupe contenant un générateur serait le groupe lui-même.

Exercice 62 (**)

On note $$\mathrm{A} = \left\{\tfrac{m}{2^n},\ (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}$$

1. Montrer que $(\mathrm{A}, +, \times)$ est un anneau.
2. Déterminer $\mathrm{U}(\mathrm{A})$.

Corrigé : 1. On a $1 = \dfrac{1}{2^0} \in \mathbb{D}$. Pour $(x,y) \in \mathbb{D}^2$, on a $x = \dfrac{p}{2^n}$ et $y = \dfrac{q}{2^m}$ avec $(p,q,n,m) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}^2$ puis

$$x - y = \frac{p}{2^n} - \frac{q}{2^m} = \frac{2^m p + 2^n q}{2^{n+m}} \in \mathrm{A} \quad \text{et} \quad xy = \frac{p}{10^n}\frac{q}{10^m} = \frac{pq}{10^{n+m}} \in \mathrm{A}$$

Ainsi $$\boxed{\text{L'ensemble A est un sous-anneau de } (\mathbb{Q}, +, \times).}$$

2. Un élément de $\mathrm{U}(\mathrm{A})$ s'écrit $\dfrac{p}{2^n}$ et il existe q et m entiers tels que $\dfrac{pq}{2^{n+m}} = 1$. Ainsi, on a $pq = 2^{n+m}$ d'où $p | 2^{n+m}$ et par conséquent

$$\mathrm{U}(\mathrm{A}) \subset \{(-1)^{\varepsilon} 2^r, (\varepsilon, t) \in \{0,1\} \times \mathbb{Z}\}$$

L'inclusion réciproque est immédiate. On conclut

$$\boxed{\mathrm{U}(\mathrm{A}) = \{(-1)^{\varepsilon} 2^r, (\varepsilon, r) \in \{0,1\} \times \mathbb{Z}\}}$$

Exercice 63 (*)

En considérant la dérivée n-ième de l'application polynomiale $x \mapsto x^{2n}$, déterminer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Corrigé : Notons $f(x) = x^n$ pour x réel. Un récurrence immédiate donne

$$\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

Par dérivation en considérant directement f^2 puis $f \times f$ avec la formule de Leibniz, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left(f^2\right)^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!} x^n \quad \text{et} \quad \left(f^2\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$$

D'où $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left(f^2\right)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k = n! x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Par identification $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$$

Remarque : C'est un cas particulier de la formule de Vandermonde.

Exercice 64 (**)

Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k+(-1)^k}{n^3}\right)$$

Corrigé : D'après l'inégalité des accroissements finis, on a $|\sin u| \leqslant |u|$ pour u réel. Ainsi, conjuguée avec l'inégalité triangulaire, on obtient
$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k+(-1)^k}{n^3}\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\sin\left(\frac{k+(-1)^k}{n^3}\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{n^3} \leqslant \frac{n(n+1)}{n^3} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$$

Ainsi
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k+(-1)^k}{n^3}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Exercice 65 (**)

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n}$ pour n entier.

Corrigé : Posons $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ pour $x \geqslant 0$. On a $f(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$ d'où $u_n \geqslant 0$ pour tout n entier par récurrence immédiate. Par dérivation, on trouve
$$\forall x \geqslant 0 \qquad f'(x) = -\frac{1}{(2+x)^2} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname*{Sup}_{x\geqslant 0} |f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$$

Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction f est k-contractante avec $k \in]\,0\,;1\,[$. On a pour $x \geqslant 0$
$$f(x) = x \iff x^2+2x = 1 \iff (x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2}) = 0 \iff x = \sqrt{2}-1$$

Par récurrence, on obtient
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|u_n - (\sqrt{2}-1)\right| \leqslant k^n \left|u_0 - (\sqrt{2}-1)\right|$$

On conclut
$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2}-1}$$

Remarque : La fonction f décroît donc on peut aussi considérer les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ qui sont monotones et vérifier leur convergence.

Exercice 66 (*)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ scindé à racines simples avec $\deg \mathrm{P} > 1$. Montrer que P' est également scindé à racines simples.

Corrigé : Notons $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ les racines de P. D'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_k \in]\,\alpha_k\,;\alpha_{k+1}\,[$ pour tout $k \in [\![\,1\,;\,n-1\,]\!]$ (on a $n-1 \geqslant 1$) et par suite

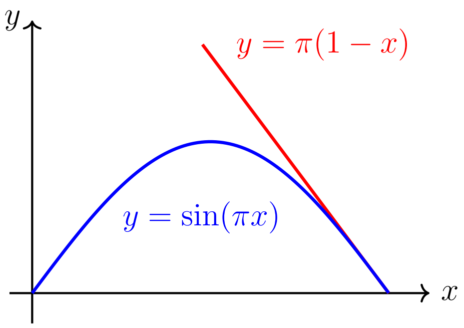
$$\boxed{\text{Le polynôme P}' \text{ est scindé à racines simples.}}$$

Exercice 67 (*)

Établir $$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \sin(\pi x) \leqslant \pi(1-x)$$

Corrigé : La fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$ est concave sur $[\,0\,;1\,]$ puisqu'elle est dérivable de dérivée $x \mapsto \pi\cos(\pi x)$ décroissante sur $[\,0\,;1\,]$. Ainsi, sa tangente en 1 est au dessus du graphe d'où

$$\boxed{\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \sin(\pi x) \leqslant \pi(1-x)}$$



Exercice 68 (*)

Soient $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$. Montrer $$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}$$

Corrigé : La fonction $\sqrt{\cdot}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$. D'après l'inégalité de Jensen, il vient

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} \geqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}$$

On conclut $$\boxed{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}}$$

Exercice 69 (**)

Soient $p, q > 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Montrer $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

2. Montrer que pour tout n entier et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ réels positifs, on a
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \sum_{k=1}^{n} b_k^q{}^{1/q}$$

Corrigé : 1. Soient $a, b > 0$. Par concavité de ln, on a
$$\frac{1}{p}\ln a + \frac{1}{q}\ln b \leqslant \ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right)$$

D'où $$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}}$$

Remarque : L'inégalité est trivialement vraie si a ou b est nul.

2. Si les a_k ou les b_k sont tous nuls, le résultat est trivial. On suppose les a_k et les b_k non tous nuls. On pose

$$\forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \alpha_k = \frac{a_k^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p} \qquad \beta_k = \frac{b_k^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q}$$

D'après le résultat de la première question, on a

$$\forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \sqrt[p]{\alpha_k}\sqrt[q]{\beta_k} \leqslant \frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{q}$$

Par sommation, il vient $$\sum_{k=1}^{n} \sqrt[p]{\alpha_k}\sqrt[q]{\beta_k} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

D'où l'inégalité de Hölder $$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}\sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}}$$

Exercice 70 (**)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

1. Montrer que $\mathrm{P} - \mathrm{X}$ divise $\mathrm{P} \circ \mathrm{P} - \mathrm{P}$.
2. En déduire que $\mathrm{P} - \mathrm{X}$ divise $\mathrm{P} \circ \mathrm{P} - \mathrm{X}$.

Corrigé : 1. Notons $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$. On a

$$\mathrm{P} \circ \mathrm{P} - \mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k (\mathrm{P} - \mathrm{X} + \mathrm{X})^k - \mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (\mathrm{P} - \mathrm{X})^\ell \mathrm{X}^{k-\ell} - \mathrm{P}$$

puis
$$\begin{aligned}\mathrm{P} \circ \mathrm{P} - \mathrm{P} &= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\ell=1}^{k} \binom{\ell}{k} (\mathrm{P} - \mathrm{X})^\ell \mathrm{X}^{k-\ell} + \sum_{k=0}^{n} a_k \binom{k}{0} (\mathrm{P} - \mathrm{X})^0 \mathrm{X}^k - \mathrm{P} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\ell=1}^{k} \binom{\ell}{k} (\mathrm{P} - \mathrm{X})^\ell \mathrm{X}^{k-\ell}\end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{P} - \mathrm{X} \text{ divise } \mathrm{P} \circ \mathrm{P} - \mathrm{P}}$$

Variante : On note $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$. On a

$$\mathrm{P} \circ \mathrm{P} - \mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\mathrm{P}^k - \mathrm{X}^k\right] = \sum_{k=0}^{n} a_k (\mathrm{P} - \mathrm{X}) \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{P}^i \mathrm{X}^{k-i}$$

2. On a $$\mathrm{P} \circ \mathrm{P} - \mathrm{X} = \mathrm{P} \circ \mathrm{P} - \mathrm{P} + \mathrm{P} - \mathrm{X}$$

D'après le résultat précédent, on conclut

$$\boxed{\mathrm{P} - \mathrm{X} \text{ divise } \mathrm{P} \circ \mathrm{P} - \mathrm{X}}$$

Exercice 71 (**)

Soit $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}$ un ensemble fini non vide. Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{X} \qquad \mathrm{P}(x) = \sqrt[3]{x}$$

Corrigé : Notons $\mathrm{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $(\mathrm{L}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à X. On a $\mathrm{L}_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$. On choisit alors $\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{x_i}\mathrm{L}_i$. On a

$$\boxed{\forall j \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \mathrm{P}(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{x_i}\mathrm{L}_i(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{x_i}\delta_{i,j} = \sqrt[3]{x_j}}$$

Exercice 72 (**)

Soit n entier et θ réel. Établir

$$\cos(n\theta) = \mathrm{T}_n(\cos(\theta)) \quad \text{avec} \quad \mathrm{T}_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (\mathrm{X}^2 - 1)^k \mathrm{X}^{n-2k}$$

Corrigé : Soit n entier et θ réel. On a

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{i}\sin(\theta))^k (\cos(\theta))^{n-k} = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (\cos(\theta)^2 - 1)^k \cos(\theta)^{n-2k}$$

On conclut $\boxed{\forall (n,\theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad \cos(n\theta) = \mathrm{T}_n(\cos(\theta))}$

Remarque : Les polynômes $(\mathrm{T}_n)_n$ sont appelés *polynômes de Tchebychev de première espèce.*

Exercice 73 (**)

Soit $(\mathrm{P}_n)_n$ suite de polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ définie par

$$\mathrm{P}_0 = 2, \quad \mathrm{P}_1 = \mathrm{X} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{P}_{n+2} = \mathrm{X}\mathrm{P}_{n+1} - \mathrm{P}_n$$

1. Calculer P_2, P_3.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Montrer que pour tout $(n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}^* \qquad \mathrm{P}_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n$.
4. En déduire une expression simple de $\mathrm{P}_n(2\cos(\theta))$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
5. Déterminer les racines de P_n.

Corrigé :

1. Le calcul donne $\boxed{\mathrm{P}_2 = \mathrm{X}^2 - 2 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_3 = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}}$

2. On peut aisément conjecturer

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{P}_n = \mathrm{X}^n + \mathrm{Q}_n \quad \text{avec} \quad \mathrm{Q}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$$

Montrons cette propriété par récurrence double. Notons :

$$\mathscr{P}(n) : \quad \mathrm{P}_n = \mathrm{X}^n + \mathrm{Q}_n \quad \text{avec} \quad \mathrm{Q}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$$

• Les propriétés $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont clairement vraies.
• $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+2)$: On suppose $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies pour n entier non nul fixé. On a

$$\begin{aligned} P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n &= X\left(X^{n+1} + Q_{n+1}\right) - P_n \\ &= X^{n+2} + Q_{n+2} \end{aligned}$$

avec $$Q_{n+2} = XQ_{n+1} - P_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$$

ce qui clôt la récurrence. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad P_n = X^n + Q_n \quad \text{avec} \quad Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

3. On procède là encore par récurrence double. Notons

$$\mathscr{P}(n): \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \qquad P_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n$$

• La vérification de $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ est immédiate.
• $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+2)$: On suppose $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies pour n entier fixé. On a

$$\begin{aligned} P_{n+2}(z+1/z) &= (z+1/z)P_{n+1}(z+1/z) - P_n(z+1/z) \\ &= (z+1/z)(z^{n+1} + 1/z^{n+1}) - (z^n + 1/z^n) = z^{n+2} + 1/z^{n+2} \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. Par conséquent

$$\boxed{\forall (n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}^* \qquad P_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n}$$

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après l'identité d'Euler, on a $2\cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$. Par suite, il vient

$$P_n(2\cos(\theta)) = P_n\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = e^{in\theta} + e^{-in\theta}$$

On en déduit $$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)}$$

5. A l'aide de la question précédente, déterminons les racines de P_n. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$P_n(2\cos(\theta)) = 0 \iff 2\cos(n\theta) = 0 \iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \iff \theta \in \left\{\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

L'application $\theta \mapsto 2\cos(\theta)$ est strictement décroissante sur $[\,0\,;\pi\,]$ donc injective sur cet intervalle.

Comme on a $$0 < \frac{\pi}{2n} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n} = \pi - \frac{\pi}{2n} < \pi$$

on en déduit $$\operatorname{Card}\left\{2\cos\left\{\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right\},\ k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]\right\} = n$$

Comme P_n est un polynôme de degré n, il admet au plus n racines et on a donc déterminé exactement toutes ses racines. Le coefficient dominant de P_n étant égal à 1, on en déduit la forme factorisée

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad P_n(X) = \prod_{k=1}^{n}\left(X - 2\cos\left[\pi\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right]\right)}$$

Exercice 74 (***)

Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Corrigé : Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ avec $a_n \neq 0$ tel que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. On a

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad P(e^{i\theta})\overline{P(e^{i\theta})} = 1$$

On pose $$\widehat{\mathrm{P}} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_{n-k}}\mathrm{X}^k$$

On a $$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \widehat{\mathrm{P}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_{n-k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\sum_{k=0}^{n} \overline{a_{n-k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\overline{\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}$$

Ainsi $$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \left(\mathrm{P}\widehat{\mathrm{P}}\right)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

ce qui prouve que le polynôme $\mathrm{P}\widehat{\mathrm{P}} - \mathrm{X}^n$ admet une infinité de racines et est donc le polynôme nul. On en déduit que P divise X^n et comme $n = \deg \mathrm{P}$, il vient $\mathrm{P} = \alpha \mathrm{X}^n$ avec $\alpha = \mathrm{P}(1) \in \mathbb{U}$. La réciproque est immédiate et on conclut

$$\boxed{\{\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}\} = \{\alpha \mathrm{X}^n,\ (\alpha, n) \in \mathbb{U} \times \mathbb{N}\}}$$

Exercice 75 (*)

Soit n entier non nul, $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{H} = \{\mathrm{M} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 0\}$. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)$.

Corrigé : On procède par analyse/synthèse. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. Supposons qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{H}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que $\mathrm{M} = \mathrm{A} + \alpha \mathrm{I}_n$. Il s'ensuit $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = n\alpha$ d'où
$$\alpha = \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \mathrm{M} - \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$$
ce qui prouve l'unicité sous réserve d'existence. On vérifie sans difficulté que cette solution convient et on conclut

$$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)}$$

Exercice 76 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour λ réel, on note $f_\lambda : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. Montrer que $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de E.

Corrigé : Soient des réels strictement ordonnés $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_{\lambda_i} = 0$. Supposons les α_i non tous nuls. On pose $k = \max\{i \in [\![1\,;n]\!] \mid \alpha_i \neq 0\}$. On a $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_{\lambda_i} = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f_{\lambda_i}$ avec $\alpha_k \neq 0$. Par factorisation, il vient
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad 0 = \alpha_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_k \mathrm{e}^{(\lambda_i - \lambda_k)t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \alpha_k = 0$$
ce qui est contradictoire. On en déduit que les α_i sont tous nuls autrement dit

$$\boxed{\text{La famille } (f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}} \text{ est libre.}}$$

Exercice 77 (***)

Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et on note $u_i = (1, a_i, \ldots, a_i^n)$ pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$. Montrer
$$(u_0, \ldots, u_n) \text{ libre} \iff \mathrm{Card}\,\{a_0, \ldots, a_n\} = n + 1$$

Corrigé : Si $\mathrm{Card}\,\{a_0, \ldots, a_n\} < n + 1$, alors il existe $a_i = a_j$ avec $i \neq j$ et par suite $u_i = u_j$ ce qui implique $(u_0, \ldots, u_n)$ liée, autrement dit, par contraposée

$$(u_0,\ldots,u_n) \text{ libre} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Card}\{a_0,\ldots,a_n\} = n+1$$

Supposons $\operatorname{Card}\{a_0,\ldots,a_n\} = n+1$. Soit $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i u_i = 0$, autrement dit

$$\forall k \in [\![\, 0\,;\, n \,]\!] \qquad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i^k = 0$$

Ainsi pour $(\alpha_0,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il vient par combinaison linéaire

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i^k = 0 \iff \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k a_i^k \right) = 0$$

Notant $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \mathrm{X}^k$, les α_k étant quelconques, on a donc

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \qquad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathrm{P}(a_i) = 0$$

En considérant $\mathrm{P} = \mathrm{L}_k$ le k-ième polynôme interpolateur de Lagrange associé à $(a_0,\ldots,a_n)$, on trouve exactement

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \underbrace{\mathrm{L}_k(a_i)}_{=\delta_{i,k}} = \lambda_k = 0$$

La liberté s'ensuit et on conclut

$$\boxed{(u_0,\ldots,u_n) \text{ libre} \iff \operatorname{Card}\{a_0,\ldots,a_n\} = n+1}$$

Exercice 78 (**)

Soit E un ensemble à n éléments. Déterminer le nombre de couples $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathcal{P}(\mathrm{E})^2$ dont l'intersection est de cardinal 1.

Corrigé : Notons N le nombre de couples de $\mathcal{P}(\mathrm{E})^2$ dont l'intersection est de cardinal 1. Il y a n façons de choisir un élément a en particulier puis $\binom{n-1}{k}$ façons de choisir les éléments de $\mathrm{X} \setminus \{a\}$ avec $k \in [\![\, 0\,;\, n-1 \,]\!]$ et $\binom{n-1-k}{\ell}$ façons de choisir les éléments de $\mathrm{Y} \setminus \mathrm{X}$ avec $\ell \in [\![\, 0\,;\, n-1-k \,]\!]$. Ainsi, on a

$$\boxed{\mathrm{N} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1-k} n \binom{n-1}{k} \binom{n-1-k}{\ell} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 2^{n-1-k} = n 3^{n-1}}$$

Variante : Une autre approche consiste à choisir un élément a en particulier (n façons de faire ce choix), puis pour chacun des $n-1$ autres éléments, on le place soit dans $\mathrm{X} \setminus \{a\}$, soit dans $\mathrm{Y} \setminus \{a\}$, soit hors de $\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}$. On a donc 3^{n-1} choix possibles de $(\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}) \setminus \{a\}$. Pour le comptage des $n-1$ autres éléments, on peut aussi considérer que chacun est dans X ou pas, dans Y ou pas, mais pas dans X et Y ce qui fait $2^2 - 1$ choix pour chacun d'où 3^{n-1} choix possibles.

Exercice 79 (**)

On choisit 11 nombres parmi $\{1,\ldots,20\}$. Montrer qu'on en trouve au moins deux dont la somme vaut 21.

Corrigé : On considère les tiroirs $\{1,20\}$, $\{2,19\}$, …, $\{10,11\}$. On tire 11 nombres (les chaussettes) à placer dans ces 10 tiroirs. Il y a alors au moins un tiroir qui contient 2 chaussettes, autrement dit

$$\boxed{\text{Il y a au moins deux nombres dont la somme vaut 21.}}$$

Exercice 80 (***)

Pour p et n entiers, on note $\mathrm{S}_{p,n}$ le nombre de surjections de $[\![1\,;\, p]\!]$ dans $[\![1\,;\, n]\!]$. Par convention, on pose $[\![1\,;\, 0]\!] = \varnothing$.

1. Préciser $\mathrm{Card}\,\left([\![1\,;\, n]\!]^{[\![1\,;\, p]\!]}\right)$.

2. Pour p et n entiers, établir $\qquad n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{S}_{p,k}$

3. Soit n entier et $u_0, \ldots, u_n$ des réels. Simplifier

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} u_\ell$$

4. En déduire une formule donnant $\mathrm{S}_{p,n}$ pour p et n entiers.

Corrigé : 1. On a $\qquad \boxed{\mathrm{Card}\,\left([\![1\,;\, n]\!]^{[\![1\,;\, p]\!]}\right) = n^p}$

2. Choisir une application de $[\![1\,;\, p]\!]$ dans $[\![1\,;\, n]\!]$ équivaut à choisir la taille de l'ensemble image, c'est-à-dire un entier $k \in [\![0\,;\, n]\!]$ puis les k éléments de l'image avec $\binom{n}{k}$ façons de faire ce choix et une surjection de $[\![1\,;\, p]\!]$ sur cet ensemble image. Notant $\mathscr{S}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ les surjections de E sur F, on a

$$[\![1\,;\, n]\!]^{[\![1\,;\, p]\!]} = \bigsqcup_{k=0}^{n} \bigsqcup_{\mathrm{Y} \subset [\![1\,;\, n]\!],\ \mathrm{Card}\,(\mathrm{Y}) = k} \mathscr{S}\left([\![1\,;\, p]\!], \mathrm{Y}\right)$$

On a $\mathrm{Card}\,(\mathscr{S}\left([\![1\,;\, p]\!], \mathrm{Y}\right)) = \mathrm{S}_{p,k}$ pour Y partie de $[\![1\,;\, n]\!]$ à k éléments et on trouve

$$\mathrm{Card}\,\left([\![1\,;\, n]\!]^{[\![1\,;\, p]\!]}\right) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\mathrm{Y} \subset [\![1\,;\, n]\!],\ \mathrm{Card}\,(\mathrm{Y}) = k} \mathrm{S}_{p,k}$$

Ainsi $\qquad \boxed{n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{S}_{p,k}}$

3. On a
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} u_\ell &= \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant k \leqslant n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!\ell!(k-\ell)!} u_\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} u_\ell \sum_{k=\ell}^{n} \frac{(n-\ell)!}{(n-k)!(k-\ell)!} (-1)^{n-k}
\end{aligned}$$
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} u_\ell = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} u_\ell \sum_{j=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{j} (-1)^{n-\ell-j} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} u_\ell (1-1)^{n-\ell}$$

On obtient $\qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} u_\ell = u_n}$

Remarque : Ce procédé s'appelle *inversion de Pascal.*

4. Soient p et n entiers. Avec le résultat des questions précédentes, il vient

$$\mathrm{S}_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \mathrm{S}_{p,\ell}}_{= k^p}$$

On conclut $\boxed{\forall (p,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathrm{S}_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} k^p}$

Exercice 81 (**)

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose qu'il existe n entier non nul tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est libre.

Corrigé : Soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_{\mathrm{E}}$. Soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x_0) = 0_{\mathrm{E}}$. On suppose les α_i non tous nuls. On pose $\ell = \min\{i \in [\![0\,;\, n-1]\!] \mid \alpha_i \neq 0\}$. Il vient

$$u^{n-1-\ell}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0)\right) = u^{n-1-\ell}\left(\sum_{i=\ell}^{n-1} \alpha_i u^i(x_0)\right) \alpha_\ell u^{n-1}(x_0) = 0$$

d'où la nullité de α_ℓ ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{Il existe } x_0 \in \mathrm{E} \text{ tel que } (x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)) \text{ est libre.}}$$

Exercice 82 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^3 = \mathrm{id}$.

1. Montrer $\qquad \mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id})$
2. Montrer

$$\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}\,(f^2 + f + \mathrm{id}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}\,(f^2 + f + \mathrm{id})$$

Corrigé : 1. On procède par analyse/synthèse.

• Analyse : On suppose $\qquad \mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}) + \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id})$

Soit $x \in \mathrm{E}$. Il existe $(a,b) \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}) \times \mathrm{E}$ tel que $x = a + (f - \mathrm{id})(b)$. En appliquant successivement f deux fois à cette relation, on obtient

$$\begin{cases} x = a + f(b) - b \\ f(x) = a + f^2(b) - f(b) \\ f^2(x) = a + b - f^2(b) \end{cases}$$

En additionnant les lignes, il vient

$$a = \frac{1}{3}\left[x + f(x) + f^2(x)\right] \quad \text{et} \quad f(b) - b = x - a = \frac{1}{3}\left[2x - f(x) - f^2(x)\right]$$

ce qui prouve l'unicité sous réserve d'existence.

• Synthèse : Soit $x \in \mathrm{E}$. On pose

$$a = \frac{1}{3}\left[\mathrm{id} + f + f^2\right](x) \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{3}\left[2x - f(x) - f^2(x)\right]$$

On a clairement $a + c = x$. Puis, on observe la factorisation $\mathrm{X}^3 - 1 = (\mathrm{X} - 1)(1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2)$ d'où

$$(f - \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} + f + f^2) = f^3 - \mathrm{id} = 0 \quad \text{d'où} \quad a \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id})$$

Reste à établir que $x \in \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id})$. On a

$$2 - \mathrm{X} - \mathrm{X}^2 = (\mathrm{X} - 1)(-2 - \mathrm{X}) \quad \text{d'où} \quad (2\,\mathrm{id} - f - f^2) = (f - \mathrm{id}) \circ (-2\,\mathrm{id} - f)$$

puis $$c=\frac{1}{3}(f-\mathrm{id})\circ(-2\,\mathrm{id}-f)(x)\in\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id})$$
ce qui prouve l'existence. On conclut
$$\boxed{\mathrm{E}=\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{id})\oplus\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id})}$$
2. Avec la factorisation $\mathrm{X}^3-1=(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)=(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-1)$, il vient
$$(f-\mathrm{id})\circ(f^2+f+\mathrm{id})=(f^2+f+\mathrm{id})\circ(f-\mathrm{id})=f^3-\mathrm{id}=0$$
d'où $$\mathrm{Im}\,(f^2+f+\mathrm{id})\subset\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{id})\quad\text{et}\quad\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id})\subset\mathrm{Ker}\,(f^2+f+\mathrm{id})$$
On a remarqué précédemment
$$(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+2)=\mathrm{X}^2+\mathrm{X}-2=\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1-3$$
d'où $$1=\frac{1}{3}(\mathrm{X}+2)(\mathrm{X}-1)+\frac{1}{3}(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)$$
et par conséquent $$\mathrm{id}=\frac{1}{3}(f+2\,\mathrm{id})\circ(f-\mathrm{id})+\frac{1}{3}(f^2+f+\mathrm{id})$$
avec commutation dans le produit. On en déduit sans difficulté les inclusions réciproques à celles précédemment obtenues et on conclut
$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{id})=\mathrm{Im}\,(f^2+f+\mathrm{id})\quad\text{et}\quad\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id})=\mathrm{Ker}\,(f^2+f+\mathrm{id})}$$

Exercice 83 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et p,q des projecteurs de E. Montrer que
$$p-q\text{ projecteur}\iff p\circ q=q\circ p=q$$
Quand cette condition est réalisée, montrer
$$\mathrm{Im}\,(p-q)=\mathrm{Im}\,p\cap\mathrm{Ker}\,q\quad\text{et}\quad\mathrm{Ker}\,(p-q)=\mathrm{Ker}\,p+\mathrm{Im}\,q$$
Corrigé : Raisonnons par équivalence. On a
$$(p-q)^2=(p-q)\iff p^2-q\circ p-p\circ q+q^2=p-q\iff 2q=p\circ q+q\circ p$$
Clairement $$p\circ q=q\circ p=q\implies 2q=p\circ q+q\circ p$$
ce qui prouve le sens indirect. Supposons $2q=p\circ q+q\circ p$. En composant cette relation par p à droite et de même à gauche, il vient
$$2q\circ p=p\circ q+p\circ q\circ p\quad\text{et}\quad 2p\circ q=p\circ q\circ p+p\circ q$$
En soustrayant les deux égalités obtenues, on trouve $p\circ q=q\circ p$ et en injectant dans l'hypothèse $2q=p\circ q+q\circ p$, on trouve le résultat attendu. Ceci prouve
$$\boxed{p-q\text{ projecteur}\iff p\circ q=q\circ p=q}$$
Montrons les égalités d'ensembles par double inclusion. Soit $x\in\mathrm{Im}\,(p-q)$. On dispose de $t\in\mathrm{E}$ tel que $x=(p-q)(t)$. Puis, on observe
$$x=p(t)-q(t)=p(t)-p\circ q(t)=p(t-q(t))\in\mathrm{Im}\,p$$
et $$q(x)=q(p(t)-q(t))=q\circ p(t)-q(t)=q(t)-q(t)=0_{\mathrm{E}}$$
D'où $x\in\mathrm{Im}\,p\cap\mathrm{Ker}\,q$. Réciproquement, soit $x\in\mathrm{Im}\,p\cap\mathrm{Ker}\,q$. Comme $p-q$ est un projecteur, on a $\mathrm{Im}\,(p-q)=\mathrm{Ker}\,(\mathrm{id}-(p-q))$ donc si $x\in\mathrm{Im}\,(p-q)$, on devrait avoir $(p-q)(x)=x$. Comme $\mathrm{Im}\,p=\mathrm{Ker}\,(\mathrm{id}-p)$, on a effectivement

$$(p-q)(x) = p(x) - q(x) = p(x) = x \in \operatorname{Im}(p-q)$$

Ainsi $$\boxed{\operatorname{Im}(p-q) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q}$$

Soit $x \in \operatorname{Ker}(p-q)$. On a $p(x) = q(x)$. Puis

$$x = p(x) + (\operatorname{id} - p)(x) = \underbrace{q(x)}_{\in \operatorname{Im} q} + \underbrace{(\operatorname{id} - p)(x)}_{\in \operatorname{Ker} p} \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} q$$

Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} q$. On dispose de $(a,b) \in \operatorname{Ker} p \times \mathrm{E}$ tel que $x = a + q(t)$.

Il vient
$$\begin{aligned}(p-q)(x) &= (p-q)(a+q(t)) \\ &= p(a) - q(a) + p \circ q(t) - q^2(t) = -q \circ p(a) + q(t) - q(t) = 0\end{aligned}$$

On conclut $$\boxed{\operatorname{Ker}(p-q) = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} q}$$

Exercice 84 (*)

Déterminer $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$$

Corrigé : Soit $x > -1$. On a

$$\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} \underset{x \to 0}{=} \frac{x - x + x^2/2 + \mathrm{o}(x^2)}{x^2 + \mathrm{o}(x^2)}$$

Ainsi $$\boxed{\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}}$$

Exercice 85 (**)

Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\sin\left(\pi\sqrt{1+x}\right)$.

Corrigé : On part du développement usuel

$$\sqrt{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{2^3 \times 3!} + \mathrm{o}(x^3)$$

Puis, par trigonométrie

$$\sin\left(\pi\sqrt{1+x}\right) \underset{x \to 0}{=} -\sin\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi x^2}{8} + \frac{\pi x^3}{16} + \mathrm{o}(x^3)\right)$$

Le développement à l'ordre 3 de sin en ne conservant que les termes d'ordre 3 donne

$$\sin\left(\pi\sqrt{1+x}\right) \underset{x \to 0}{=} -\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi x}{2} + \mathrm{o}(x)\right)^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

D'où $$\boxed{\sin\left(\pi\sqrt{1+x}\right) \underset{x \to 0}{=} -\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi x^2}{8} + \left(\frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{16}\right) x^3 + \mathrm{o}(x^3)}$$

Exercice 86 (**)

Soit n entier non nul et $f(x) = (1 - \mathrm{e}^x)^n$ pour tout x réel.

1. Montrer que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in [\![0 ; n-1]\!]$.
2. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^p$ pour tout $p \in [\![0 ; n]\!]$.

Corrigé : 1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ comme composée de telles fonctions. On a le développement et l'égalité fournie par le théorème de Taylor-Young

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} (1 - 1 - x + \mathrm{o}(x))^n = (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

Par unicité du développement limité, on conclut

$$\boxed{\forall k \in [\![0 ; n-1]\!] \qquad f^{(k)}(0) = 0}$$

2. Un développement de binôme donne

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathrm{e}^{kx}$$

d'où
$$\forall (p, x) \in [\![0 ; n]\!] \times \mathbb{R} \qquad f^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^p \mathrm{e}^{kx}$$

Il en résulte

$$\boxed{\forall k \in [\![0 ; n-1]\!] \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^p = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^n = (-1)^n n!}$$

Exercice 87 (*)

Soient E, F des $\mathbb{K}$-ev et f, g dans $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})^2$ avec $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} g$ de dimension finie. Montrer

$$|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

Corrigé : On a clairement

$$\operatorname{Im}(f+g) = \{f(x) + g(x),\ x \in \mathrm{E}\} \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \{f(x) + g(y),\ (x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}\}$$

Passant aux dimensions, il vient

$$\operatorname{rg}(f+g) \leqslant \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g)$$

D'après la formule de Grassmann, on sait que

$$\dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

d'où
$$\boxed{\operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)}$$

Ensuite, avec l'inégalité précédemment établie, en remarquant $\operatorname{rg}(-g) = \operatorname{rg}(g)$, il vient

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f+g-g) \leqslant \operatorname{rg}(f+g) + \operatorname{rg}(-g) = \operatorname{rg}(f+g) + \operatorname{rg}(g)$$

d'où
$$\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g) \leqslant \operatorname{rg}(f+g)$$

Par symétrie des rôles en f et g, on a également

$$\operatorname{rg}(g) - \operatorname{rg}(f) \leqslant \operatorname{rg}(f+g)$$

On conclut
$$\boxed{|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)}$$

Exercice 88 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul. On pose

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M} - \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$$

Justifier que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis calculer φ^2 et préciser $\mathrm{Ker}\ \varphi$, $\mathrm{Im}\ \varphi$.

Corrigé : L'application φ est à valeurs dans E, linéaire par linéarité de la trace et bilinéarité du produit. Pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$, on obtient

$$\varphi^2(\mathrm{M}) = \varphi\left(\mathrm{M} - \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\mathrm{I}_n\right) = \varphi(\mathrm{M}) - \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\varphi(\mathrm{I}_n)$$

et on observe $\varphi(\mathrm{I}_n) = 0$. Ainsi

$$\boxed{\varphi^2 = \varphi}$$

On a $\mathrm{Im}\ \varphi = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \mathrm{id}\,) = \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}$ puis, avec l'inclusion $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n) \subset \mathrm{Ker}\ \varphi$ et pour raison de dimension, on conclut

$$\boxed{\mathrm{Ker}\ \varphi = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\ \varphi = \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}}$$

Remarque : L'application φ est le projecteur sur $\mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n)$.

Exercice 89 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}$.

Corrigé : Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{E}$. On a

$$\mathrm{M} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr} \iff \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} = 0 \iff m_{1,1} = -\sum_{i=2}^{n} m_{i,i}$$

Ainsi

$$\mathrm{M} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr} \iff \mathrm{M} = \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} m_{i,j}\mathrm{E}_{i,j} + \sum_{i=2}^{n} m_{i,j}\,(\mathrm{E}_{1,1} - \mathrm{E}_{i,i})$$

La famille $(\mathrm{E}_{1,1} - \mathrm{E}_{i,i})_{i\in[\![2\,;\,n]\!]} \biguplus (\mathrm{E}_{i,j})_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}$ est donc génératrice de $\mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}$ et sa liberté est immédiate. On conclut

$$\boxed{\text{La famille } (\mathrm{E}_{1,1} - \mathrm{E}_{i,i})_{i\in[\![2\,;\,n]\!]} \biguplus (\mathrm{E}_{i,j})_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} \text{ est une base de } \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}\,.}$$

Exercice 90 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n entier non nul et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E. On pose

$$\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid v \circ u = u \circ v\}$$

1. Montrer que $\mathscr{C}(u)$ est un sous-anneau et un sev de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer $$\mathscr{C}(u) = \mathbb{K}_{n-1}[u]$$
3. Déterminer $\dim \mathscr{C}(u)$.

Corrigé : 1. On vérifie sans difficulté que $\mathrm{id} \in \mathscr{C}(u)$, $\mathscr{C}(u)$ sev de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $v \circ w \in \mathscr{C}(u)$ pour v, w dans $\mathscr{C}(u)$. Ainsi

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathscr{C}(u) \text{ est un sous-anneau et un sev de } \mathscr{L}(\mathrm{E}).}$$

Remarque : On dit que $\mathscr{C}(u)$ est une *sous-algèbre* de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

2. On a clairement $\mathbb{K}_{n-1}[u] \subset \mathscr{C}(u)$. Réciproquement, soit $v \in \mathscr{C}(u)$. Le vecteur $v(x_0)$ se décompose dans la base $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ en

$$v(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) \quad \text{avec} \quad (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$$

Soit $i \in [\![0\,; n-1]\!]$. Comme v commute avec u, alors v commute avec u^i pour tout $i \in [\![0\,; n-1]\!]$ puis

$$\begin{aligned} v\left(u^i(x_0)\right) &= u^i \circ v(x_0) = u^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)\right) \\ &= u^i \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k\right)(x_0) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k\right)\left(u^i(x_0)\right) \end{aligned}$$

Ainsi, les endomorphismes v et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$ coïncident sur la base $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ et sont donc égaux ce qui prouve l'inclusion directe. On conclut

$$\boxed{\mathscr{C}(u) = \left\{\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k,\ (a_i)_{i \in [\![0\,; n-1]\!]} \in \mathbb{K}^n\right\}}$$

Variante : Soit $x \in \mathrm{E}$. Il existe $(b_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k(x_0)$. Ainsi

$$\begin{aligned} v(x) = v\left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k(x_0)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k v \circ u^k(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k \circ v(x_0) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell u^\ell(x_0)\right) = \sum_{0 \leqslant k, \ell \leqslant n-1} a_\ell b_k u^{k+\ell}(x_0) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell u^\ell(x) \end{aligned}$$

3. D'après ce qui précède, la famille $(u^k)_{k \in [\![0\,; n-1]\!]}$ est génératrice de $\mathscr{C}(u)$. Montrons sa liberté. Soit $(a_k)_{k \in [\![0\,; n-1]\!]} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^{k-1} = 0$. En particulier, en évaluant en x_0, il vient $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = 0$. Or la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E donc libre et par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall k \in [\![0\,; n-1]\!] \qquad a_k = 0$$

Ainsi, la famille $(u^k)_{k \in [\![0\,; n-1]\!]}$ est libre et génératrice de $\mathscr{C}(u)$ donc est une base de $\mathscr{C}(u)$. Son cardinal étant égal à n, on conclut

$$\boxed{\dim \mathscr{C}(u) = n}$$

Exercice 91 (**)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Interpréter A comme matrice d'un endomorphisme de $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Corrigé : On décompose

$$\mathrm{A} = \mathrm{M} + \mathrm{N} \quad \text{avec} \quad \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ n & \ddots & & & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On note f et g endomorphismes canoniquement associés à M et N. On a

$$\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad f(\mathrm{X}^k) = k\mathrm{X}^{k-1} \quad \text{et} \quad g(\mathrm{X}^k) = (n-k)\mathrm{X}^{k+1} = n\mathrm{X} \cdot \mathrm{X}^k - \mathrm{X}^2 \cdot k\mathrm{X}^{k-1}$$

Par suite $\qquad \forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}' \quad \text{et} \quad g(\mathrm{P}) = n\mathrm{XP} - \mathrm{X}^2\mathrm{P}'$

Ainsi $\qquad \boxed{\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\varphi \quad \text{avec} \quad \forall \mathrm{P} \in \mathrm{E} \qquad \varphi(\mathrm{P}) = (1-\mathrm{X}^2)\mathrm{P}' + n\mathrm{XP}}$

Exercice 92 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ avec n entier non nul. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, on pose $\varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\mathrm{P}' - n\mathrm{XP}$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Préciser $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\varphi$ où $\mathscr{C}$ désigne la base canonique de E.
2. Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}\ \varphi$ et $\mathrm{Im}\ \varphi$.

Corrigé : 1. L'application φ est linéaire par linéarité du produit à gauche et de la dérivation. On a

$$\varphi(1) = -n\mathrm{X} \in \mathrm{E}$$

et $\qquad \forall k \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \varphi(\mathrm{X}^k) = (k-n)\mathrm{X}^{k+1} - k\mathrm{X}^k$

d'où $\varphi(\mathrm{X}^k) \in \mathrm{E}$ pour tout $k \in [\![0\,;\, n]\!]$, y compris le cas $k = n$ puisque le coefficient devant le terme en X^{n+1} s'annule. Par caractérisation d'une application linéaire sur une base, on conclut

$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

Et on a $\qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -n & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -(n-1) & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -n \end{pmatrix}$

2. On a $\qquad \mathrm{P} \in \operatorname{Ker} \varphi \iff \mathrm{X}\left[(\mathrm{X}-1)\mathrm{P}'-n\mathrm{P}\right]=0 \iff (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}'-n\mathrm{P}=0$

Résolvons l'équation différentielle associée sur $]\,1\,;+\infty\,[$ et cherchons des solutions polynomiales :

$$(t-1)x'(t)-nx(t)=0 \iff x \in \operatorname{Vect}\left(t \mapsto (t-1)^n\right)$$

D'où
$$\boxed{\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Vect}(\mathrm{X}-1)^n}$$

Puis, la famille $\left(\varphi(\mathrm{X}^k)\right)_{k\in[\![\,0\,;\,n\,]\!]}$ est génératrice de $\operatorname{Im} \varphi$. D'après le théorème du rang, on cherche à extraire une famille libre de cardinal n de la famille génératrice précédente. Le caractère échelonnée montre que les familles $\left(\varphi(\mathrm{X}^k)\right)_{k\in[\![\,0\,;\,n-1\,]\!]}$ et $\left(\varphi(\mathrm{X}^k)\right)_{k\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]}$ font l'affaire mais on peut fournir une base plus simple encore. Par lecture matricielle, on observe

$$\forall k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!] \qquad \varphi(\mathrm{X}^k) \in \operatorname{Vect}(\mathrm{X},\ldots,\mathrm{X}^n)$$

d'où
$$\operatorname{Im} \varphi \subset \operatorname{Vect}(\mathrm{X},\ldots,\mathrm{X}^n)$$

Par égalité des dimensions, on conclut

$$\boxed{\text{La famille } (\mathrm{X},\ldots,\mathrm{X}^n) \text{ est une base de } \operatorname{Im} \varphi.}$$

Exercice 93 (*)

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Corrigé : On a $\qquad \displaystyle\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

S'ensuit un téléscopage et on trouve

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1}$$

Exercice 94 (**)

1. Soient A, B dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ avec $\deg \mathrm{A} < \deg \mathrm{B}$. On suppose B scindé à racines simples avec $\mathrm{B} = \lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X}-\alpha_i)$. Montrer
$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{A}(\alpha_i)}{\mathrm{B}'(\alpha_i)(\mathrm{X}-\alpha_i)}$$

2. Soit $z_1,\ldots,z_n$ des complexes non nuls deux à deux distincts. On note $\mathrm{P} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X}-z_k)$.

   Calculer $\qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^k}{\mathrm{P}'(z_i)}$ pour $k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$

Corrigé : 1. D'après le théorème de décomposition en éléments simples, on dispose de scalaires λ_i tels que

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mathrm{X}-\alpha_i}$$

Pour déterminer les λ_i, on effectue l'opération suivante

$$\forall i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}(\mathrm{X}-\alpha_i)\right]_{|\mathrm{X}=\alpha_i} = \lambda_i$$

Or, en écrivant $\mathrm{B} = (\mathrm{X} - \alpha_i)\mathrm{Q}_i$ avec $\mathrm{Q}_i \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on constate que $\mathrm{P}'(\alpha_i) = \mathrm{Q}_i(\alpha_i)$ et il s'ensuit

$$\boxed{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{A}(\alpha_i)}{\mathrm{B}'(\alpha_i)(\mathrm{X} - \alpha_i)}}$$

Variante : On peut retrouver directement le résultat du théorème. Soit $(\mathrm{L}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base des polynômes d'interpolation de Lagrange de $\mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$ associée à $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. On a $\mathrm{A} = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{A}(\alpha_i)\mathrm{L}_i$ d'où

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{A}(\alpha_i)\mathrm{L}_i}{\mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{A}(\alpha_i)}{\mathrm{B}'(\alpha_i)(\mathrm{X} - \alpha_i)}$$

2. Pour $k \in [\![0 \,; n-2]\!]$, on a $$\frac{\mathrm{X}^{k+1}}{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^{k+1}}{\mathrm{P}'(z_i)(\mathrm{X} - z_i)}$$

Substituant X par zéro, il vient $$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^{k}}{\mathrm{P}'(z_i)}$$

Pour $k = n-1$, on a $\deg \mathrm{X}^{k+1} = n$ donc il faudrait isoler la partie entière du reste. On a

$$\frac{\mathrm{X}^n}{\mathrm{P}} = 1 + \frac{\mathrm{X}^n - \mathrm{P}}{\mathrm{P}} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^{n}}{\mathrm{P}'(z_i)(\mathrm{X} - z_i)}$$

Substituant X par zéro, on trouve $$-1 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^{n}}{\mathrm{P}'(z_i)}$$

Ainsi $$\boxed{\forall k \in [\![0 \,; n-1]\!] \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^{k}}{\mathrm{P}'(z_i)} = \delta_{k,n-1}}$$

Exercice 95 (**)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ scindé à racines simples $x_1, \ldots, x_n$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{P}'(\alpha) \neq 0$. Montrer qu'il existe $i \in [\![1 \,; n]\!]$ tel que

$$|\alpha - x_i| \leqslant n \left| \frac{\mathrm{P}(\alpha)}{\mathrm{P}'(\alpha)} \right|$$

Corrigé : Si $\mathrm{P}(\alpha) = 0$, le résultat est trivial. Sinon, on a

$$\frac{\mathrm{P}'(\alpha)}{\mathrm{P}(\alpha)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha - x_i}$$

On choisit $i \in [\![1 \,; n]\!]$ tel que $$|\alpha - x_i| = \operatorname*{Min}_{k \in [\![1 \,; n]\!]} |\alpha - x_k|$$

Par inégalité triangulaire, il vient

$$\left| \frac{\mathrm{P}'(\alpha)}{\mathrm{P}(\alpha)} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|\alpha - x_k|} \leqslant \frac{n}{|\alpha - x_i|}$$

Ainsi $$\boxed{\exists i \in [\![1 \,; n]\!] \quad | \quad |\alpha - x_i| \leqslant n \left| \frac{\mathrm{P}(\alpha)}{\mathrm{P}'(\alpha)} \right|}$$

Exercice 96 (*)

Soit $f \in \mathscr{C}^1([a\,;b],\mathbb{R})$.

1. Étudier le comportement asymptotique de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t$ pour $n \to +\infty$.

2. En déduire les comportements de de $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$ pour $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. En intégrant par partie, les fonctions f et $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{int}}{in}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$, il vient

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{f(t)\mathrm{e}^{int}}{\mathrm{i}n}\right]_a^b - \frac{1}{\mathrm{i}n}\int_a^b f'(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t$$

D'où
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\left[|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right]$$

Ainsi
$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

2. On sait
$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad |\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant |z| \quad \text{et} \quad |\mathrm{Im}\,(z)| \leqslant |z|$$

Soit n entier. Il vient

$$\left|\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right)\right| \leqslant \left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right|$$

et de même
$$\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right)\right| \leqslant \left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right|$$

On conclut
$$\boxed{\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Exercice 97 (**)

Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) \qquad \text{avec} \quad f \in \mathscr{C}^0([0\,;1],\mathbb{R})$$

Corrigé : Pour n entier non nul, on pose $\mathrm{S}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. On a

$$\mathrm{S}_n^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) = \frac{2}{n^2}\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} f^2\left(\frac{k}{n}\right)$$

en séparant les termes diagonaux des autres et par symétrie des sommes hors diagonale. D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a

$$\mathrm{S}_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^2\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$$

On conclut
$$\boxed{\frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}$$

Exercice 98 (***)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\quad \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi} |\sin(nt)| \,\mathrm{d}t \quad$ et $\quad \mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{\pi} t\,|\sin(nt)| \,\mathrm{d}t$

Montrer que les suites $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{J}_n)_{n\geqslant 1}$ sont constantes.

Corrigé : Soit n entier non nul. On effectue le changement $u = nt$ de classe $\mathscr{C}^1$ puis on découpe l'intégrale avec la relation de Chasles et on applique le changement $v = u - k\pi$ de classe $\mathscr{C}^1$ dans chaque intégrale. On obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} |\sin(u)| \,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)| \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} |\sin(v+k\pi)| \,\mathrm{d}v = \int_0^{\pi} \sin(v)\,\mathrm{d}v = 2
\end{aligned}$$

On procède de même pour J_n et on poursuit le calcul par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_n &= \frac{1}{n^2}\int_0^{n\pi} u\,|\sin(u)| \,\mathrm{d}u = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} u\,|\sin(u)| \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} (v+k\pi)\,|\sin(v+k\pi)| \,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{n^2}\left(n\int_0^{\pi} v\,|\sin(v)| \,\mathrm{d}v + \pi\frac{n(n-1)}{2}\int_0^{\pi} |\sin(v)| \,\mathrm{d}v\right) \\
\mathrm{J}_n &= \frac{1}{n}\left(\int_0^{\pi}\left(v-\frac{\pi}{2}\right)\sin(v)\,\mathrm{d}v\right) + \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin(v)\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Le changement $s = v - \dfrac{\pi}{2}$ (de classe $\mathscr{C}^1$) dans la première intégrale de l'égalité ci-dessus donne

$$\int_0^{\pi}\left(v-\frac{\pi}{2}\right)\sin(v)\,\mathrm{d}v = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} s\sin\left(\frac{\pi}{2}+s\right)\mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} s\cos(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

l'intégrale étant nulle comme intégrale d'une fonction impaire sur un domaine centré. On conclut

$$\boxed{\text{Les suites } (\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 1} \text{ et } (\mathrm{J}_n)_{n\geqslant 1} \text{ sont constantes, respectivement égales à 2 et } \pi.}$$

Exercice 99 (Intégrale de Wallis **)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\quad \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n \,\mathrm{d}t$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout $n \geqslant 2$.
2. Donner une expression de I_n à l'aide de factorielles en distinguant selon la parité de n.
3. Étudier la monotonie de la suite $(\mathrm{I}_n)_n$.
4. En considérant la suite $(n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1})_{n\geqslant 1}$, déterminer un équivalent de I_n pour $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. En intégrant par parties, il vient

$$\mathrm{I}_n = [-\cos(t)\sin(t)^{n-1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{n-2}\cos(t)^2\,\mathrm{d}t = (n-1)\,(\mathrm{I}_{n-2} - \mathrm{I}_n)$$

Ainsi $\quad \boxed{\forall n \geqslant 2 \qquad n\mathrm{I}_n = (n-1)\mathrm{I}_{n-2}}$

2. On a $\mathrm{I}_n > 0$ pour tout n entier puisque $t \mapsto \sin(t)^n$ est continue positive non nulle. Soit n entier. On a le produit téléscopique

$$\mathrm{I}_{2n} = \mathrm{I}_0 \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{I}_{2k}}{\mathrm{I}_{2(k-1)}} \right) = \mathrm{I}_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \mathrm{I}_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)2k}{(2k)^2} = \mathrm{I}_0 \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

et $$\mathrm{I}_{2n+1} = \mathrm{I}_1 \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{I}_{2k+1}}{\mathrm{I}_{2k-1}} \right) = \mathrm{I}_1 \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{2k+1} \right) = \mathrm{I}_1 \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{2k(2k+1)} = \mathrm{I}_1 \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Avec $\mathrm{I}_0 = \pi/2$ et $\mathrm{I}_1 = 1$, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}$$

3. La suite $(\mathrm{I}_n)_n$ est clairement décroissante.

4. En multipliant la relation établie à la première question par I_{n-1}, on trouve

$$\forall n \geqslant 2 \qquad n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1} = (n-1)\mathrm{I}_{n-1}\mathrm{I}_{n-2}$$

ce qui prouve que la suite est constante. Par suite

$$\forall n \geqslant 1 \qquad n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1} = \mathrm{I}_1\mathrm{I}_0 = \frac{\pi}{2}$$

Par décroissance et positivité de $(\mathrm{I}_n)_n$, il vient

$$n\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n = (n+1)\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n \times \frac{n}{n+1} \leqslant n\mathrm{I}_n^2 \leqslant n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1}$$

Par encadrement $$\boxed{\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

Exercice 100 (**)

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et $\mathrm{I}_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q \,\mathrm{d}t$.

1. Établir une relation de récurrence entre $\mathrm{I}_{p,q}$ et $\mathrm{I}_{p+1,q-1}$ si q est non nul.
2. En déduire une expression de $\mathrm{I}_{p,q}$ avec des factorielles.

Corrigé : 1. En intégrant par parties (fonctions $\mathscr{C}^1$), il vient

$$\mathrm{I}_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{p+1}(1-t)^q}{p+1} \right]_0^1 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1} \,\mathrm{d}t$$

Autrement dit $$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_{p,q} = \frac{q}{p+1} \mathrm{I}_{p+1,q-1}}$$

2. Par une récurrence immédiate, on obtient

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{p,q} = \frac{q \times (q-1) \times \ldots \times 1}{(p+1) \times (p+2) \times \ldots \times (p+q)} \mathrm{I}_{p+q,0}$$

avec $$\mathrm{I}_{p+q,0} = \int_0^1 t^{p+q} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{p+q+1}$$

puis $$\mathrm{I}_{p,q} = \frac{1 \times \ldots \times (p-1) \times p \times q!}{1 \times \ldots \times p \times (p+1) \times \ldots \times (p+q)} \mathrm{I}_{p+q,0} = \frac{p!\, q!}{(p+q)!} \frac{1}{(p+q+1)}$$

D'où
$$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{p,q} = \frac{1}{(p+q+1)\binom{p+q}{p}}}$$

Exercice 101 (**)

Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi avec $\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = -1) = 1-p$ et $p \in \,]\,0\,;1\,[$. Pour $k \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!]$, on note $\mathrm{Y}_k = \prod\limits_{i=1}^{k} \mathrm{X}_i$, $a_k = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_k = 1)$ et $b_k = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_k = -1)$.

1. Montrer $\qquad \exists \mathrm{Q} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \qquad \forall k \in [\![\, 1\,;\, n-1\,]\!] \qquad \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1}\end{pmatrix} = \mathrm{Q}\begin{pmatrix} a_k \\ b_k\end{pmatrix}$

2. En déduire une expression de a_n en fonction de n et p.

Corrigé : 1. Soit $k \in [\![\, 1\,;\, n-1\,]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, on a
$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{k+1} = 1) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_{k+1} = 1|\mathrm{Y}_k = 1)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_k = 1) + \mathbb{P}(\mathrm{Y}_{k+1} = 1|\mathrm{Y}_k = -1)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_k = -1)$$
et $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{k+1} = -1) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_{k+1} = -1|\mathrm{Y}_k = 1)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_k = 1) + \mathbb{P}(\mathrm{Y}_{k+1} = -1|\mathrm{Y}_k = -1)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_k = -1)$

ce qui se réécrit, par indépendance de X_{k+1} et Y_k
$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{k+1} = 1) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_{k+1} = 1)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_k = 1) + \mathbb{P}(\mathrm{X}_{k+1} = -1)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_k = -1)$$
et
$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{k+1} = -1) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_{k+1} = -1)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_k = 1) + \mathbb{P}(\mathrm{X}_{k+1} = 1)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_k = -1)$$
D'où
$$\boxed{\forall k \in [\![\, 1\,;\, n-1\,]\!] \qquad \mathrm{U}_{k+1} = \mathrm{Q}\mathrm{U}_k \quad \text{avec} \quad \mathrm{U}_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Q} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p\end{pmatrix}}$$

2. On en déduit
$$\forall k \in [\![\, 1\,;\, n-\,]\!] \qquad a_{k+1} = pa_k + (1-p)b_k = pa_k + (1-p)(1-a_k) = (2p-1)a_k + 1 - p$$
La suite $(a_k)_{k\geqslant 1}$ est arithmético-géométrique. Le point fixe α est solution de
$$\alpha = (2p-1)\alpha + 1 - p \iff \alpha = \frac{1}{2}$$
puis $\quad \forall k \in [\![\, 1\,;\, n-1\,]\!] \qquad a_{k+1} = (2p-1)a_k + 1 - p \iff a_{k+1} - \alpha = (2p-1)(a_k - \alpha)$

Tous calculs effectués, on conclut
$$\boxed{a_n = \frac{1}{2}\left(1 + (2p-1)^n\right)}$$

Exercice 102 (**)

Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer
$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant n)$$
Corrigé : Soit N entier tel que $\mathrm{X}(\Omega) \subset [\![\, 0\,;\, \mathrm{N}\,]\!]$ (un tel entier N existe puisque $\mathrm{X}(\Omega)$ est une partie finie de $\mathbb{N}$). On a
$$\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} k\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} k\mathbb{P}\left(\{\mathrm{X} \geqslant k\} \smallsetminus \{\mathrm{X} \geqslant k+1\}\right) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} k\left[\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant k) - \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant k+1)\right]$$

Avec un changement d'indice, on obtient

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} k\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)=\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\mathbb{P}(\mathrm{X}\geqslant k)-\sum_{k=1}^{\mathrm{N}+1}(k-1)\mathbb{P}(\mathrm{X}\geqslant k)=\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\mathbb{P}(\mathrm{X}\geqslant k)-\mathrm{N}\mathbb{P}(\mathrm{X}\geqslant \mathrm{N}+1)$$

Autrement dit $\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{X})=\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\mathbb{P}(\mathrm{X}\geqslant n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}\geqslant n)}$

Variante : On peut aussi écrire

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\mathbb{P}(\mathrm{X}\geqslant n)=\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\mathrm{N}}\{\mathrm{X}=k\}\right)=\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\sum_{k=n}^{\mathrm{N}}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$$

puis permuter les sommes.

Exercice 103 (***)

Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, U et V des variables aléatoires réelles vérifiant

$$\forall k\in\mathbb{N}\qquad \mathbb{E}(\mathrm{U}^k)=\mathbb{E}(\mathrm{V}^k)$$

Montrer que U et V ont même loi.

Corrigé : Par linéarité de l'espérance, on trouve

$$\forall \mathrm{Q}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]\qquad \mathbb{E}(\mathrm{Q}(\mathrm{U}))=\mathbb{E}(\mathrm{Q}(\mathrm{V}))$$

Notons $\mathrm{A}=\mathrm{U}(\Omega)\cup\mathrm{V}(\Omega)=\{a_i, i\in[\![1\,;n]\!]\}$. Par transfert, on a

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Q}(a_i)\mathbb{P}(\mathrm{U}=a_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Q}(a_i)\mathbb{P}(\mathrm{V}=a_i)$$

En considérant la famille des polynômes de Lagrange $(\mathrm{L}_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ associés à A, on obtient

$$\forall j\in[\![1\,;n]\!]\qquad \mathbb{P}(\mathrm{U}=a_j)=\mathbb{E}(\mathrm{L}_j(\mathrm{U}))=\mathbb{E}(\mathrm{L}_j(\mathrm{V}))=\mathbb{P}(\mathrm{V}=a_j)$$

On conclut $\boxed{\text{Les variables aléatoires U et V ont même loi.}}$

Remarque : L'étape décisive est de considérer $\mathrm{U}(\Omega)\cup\mathrm{V}(\Omega)$. Si on ne procède pas ainsi, les choses deviennent rapidement indémêlables ...

Exercice 104 (***)

Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![0\,;2\mathrm{N}]\!]$ avec N entier non nul. On note $\mathrm{S}_n=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i$.

1. Calculer $m=\mathbb{E}(\mathrm{X}_1)$.
2. Soit $t>0$. Justifier l'égalité
$$\left\{\mathrm{S}_n\geqslant\frac{3nm}{2}\right\}=\left\{\mathrm{e}^{\,t(\mathrm{S}_n-n\mathrm{N})}\geqslant \mathrm{e}^{\,\frac{t\mathrm{N}n}{2}}\right\}$$
3. En déduire $\qquad \forall t>0\qquad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n\geqslant\frac{3nm}{2}\right)\leqslant \mathrm{e}^{n\varphi(t)}$

   avec $\qquad \varphi(t)=-\frac{\mathrm{N}t}{2}+\ln\left(\frac{\operatorname{sh}((\mathrm{N}+1/2)t)}{\operatorname{sh}(t/2)}\right)-\ln(2\mathrm{N}+1)$

4. Déterminer un développement limité de φ en 0 à l'ordre 1.
5. Conclure qu'il existe $r \in]\,0\,;1\,[$ tel que

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \frac{3nm}{2}\right) \leqslant r^n$$

Corrigé : 1. Par linéarité de l'espérance on trouve

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{X}_1) = \frac{1}{2\mathrm{N}+1}\sum_{k=0}^{2\mathrm{N}} k = \frac{2\mathrm{N}(2\mathrm{N}+1)}{2(2\mathrm{N}+1)} = \mathrm{N}}$$

2. On a $m = \mathrm{N}$ et par croissance stricte de $u \mapsto \mathrm{e}^{tu}$ pour $t > 0$, on obtient

$$\boxed{\forall t > 0 \qquad \left\{\mathrm{S}_n \geqslant \frac{3nm}{2}\right\} = \left\{\mathrm{S}_n - n\mathrm{N} \geqslant \frac{n\mathrm{N}}{2}\right\} = \left\{\mathrm{e}^{t(\mathrm{S}_n - n\mathrm{N})} \geqslant \mathrm{e}^{\frac{t\mathrm{N}n}{2}}\right\}}$$

3. Soit $t > 0$. D'après l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire positive $\mathrm{e}^{t(\mathrm{S}_n - n\mathrm{N})}$, il vient

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \frac{3nm}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{t(\mathrm{S}_n - n\mathrm{N})} \geqslant \mathrm{e}^{\frac{t\mathrm{N}n}{2}}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{tn\mathrm{N}}{2}} \times \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t(\mathrm{S}_n - n\mathrm{N})}\right)$$

Puis, par indépendance des X_i

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t(\mathrm{S}_n - n\mathrm{N})}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t(\mathrm{X}_i - \mathrm{N})}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t(\mathrm{X}_i - \mathrm{N})}\right)$$

et par transfert

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t(\mathrm{X}_i - \mathrm{N})}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-t\mathrm{N}}}{2\mathrm{N}+1}\left[1 + \mathrm{e}^{t} + \ldots + \mathrm{e}^{t2\mathrm{N}}\right] = \frac{\mathrm{e}^{-t\mathrm{N}}}{2\mathrm{N}+1} \times \frac{1 - \mathrm{e}^{(2\mathrm{N}+1)t}}{1 - \mathrm{e}^{t}}$$

Avec une factorisation de type angle moitié, on obtient

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t(\mathrm{X}_i - \mathrm{N})}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-t\mathrm{N}}}{2\mathrm{N}+1} \times \frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{N}+1/2)t}}{\mathrm{e}^{t/2}} \times \frac{\mathrm{sh}\,((\mathrm{N}+1/2)t)}{\mathrm{sh}\,(t/2)} = \frac{1}{2\mathrm{N}+1} \times \frac{\mathrm{sh}\,((\mathrm{N}+1/2)t)}{\mathrm{sh}\,(t/2)}$$

$$\boxed{\forall t > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \frac{3nm}{2}\right) \leqslant \mathrm{e}^{n\varphi(t)} \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = -\frac{\mathrm{N}t}{2} + \ln\left(\frac{\mathrm{sh}\,((\mathrm{N}+1/2)t)}{\mathrm{sh}\,(t/2)}\right) - \ln(2\mathrm{N}+1)}$$

4. La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}\,((\mathrm{N}+1/2)t)}{\mathrm{sh}\,(t/2)}$ est paire comme quotient de deux fonctions impaires et son développement limité à l'ordre 1 donne

$$\left(\frac{\mathrm{sh}\,((\mathrm{N}+1/2)t)}{\mathrm{sh}\,(t/2)}\right) \underset{t \to 0}{=} (2\mathrm{N}+1) + \mathrm{o}(t)$$

Par suite

$$\varphi(t) = -\frac{\mathrm{N}t}{2} + \ln\left((2\mathrm{N}+1) + \mathrm{o}(t)\right) - \ln(2\mathrm{N}+1) \quad \text{et} \quad \ln\left((2\mathrm{N}+1) + \mathrm{o}(t)\right) = \ln(2\mathrm{N}+1) + \mathrm{o}(t)$$

Ainsi

$$\boxed{\varphi(t) \underset{t \to 0}{=} -\frac{\mathrm{N}t}{2} + \mathrm{o}(t)}$$

5. D'après l'équivalent précédemment obtenu, la fonction φ prend des valeurs négatives au voisinage de zéro. On dispose donc de $t_0 > 0$ tel que $\varphi(t_0) < 0$ et, avec le choix $r = \mathrm{e}^{\varphi(t_0)}$, on conclut

$$\boxed{\exists r \in]\,0\,;1\,[\quad | \quad \forall n \geqslant 1 \qquad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \geqslant \frac{3nm}{2}\right) \leqslant r^n}$$

Exercice 105 (***)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in]\,0\,;1\,[$. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$.

1. Montrer $$\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n > \frac{np}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \leqslant \frac{np}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

   Dans ce qui suit, on note
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}_n = \left\{\mathrm{S}_n > \frac{np}{2}\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}_n = \left\{\mathrm{S}_n \leqslant \frac{np}{2}\right\}$$

2. Montrer $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Corrigé : 1. D'après la loi faible des grands nombres, il vient
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - p\right| \geqslant \frac{p}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
Soit n entier non nul. On a
$$\left\{\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - p\right| \geqslant \frac{p}{2}\right\} = \left\{\mathrm{S}_n \geqslant \frac{3np}{2}\right\} \sqcup \left\{\mathrm{S}_n \leqslant \frac{np}{2}\right\}$$
Ainsi
$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \leqslant \frac{np}{2}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - p\right| \geqslant \frac{p}{2}\right)$$
et comme les événements $\left\{\mathrm{S}_n > \frac{np}{2}\right\}$ et $\left\{\mathrm{S}_n \leqslant \frac{np}{2}\right\}$ forment un système complet, on conclut
$$\boxed{\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n > \frac{np}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n \leqslant \frac{np}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$
2. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathrm{Arctan}\,(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$, on dispose de $\mathrm{A} > 0$ tel que pour $x \geqslant \mathrm{A}$
$$\left|\mathrm{Arctan}\,(x) - \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon$$
On décompose
$$\left\{\left|\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right\} = \left\{\left|\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \varepsilon, \mathrm{S}_n > \frac{np}{2}\right\} \sqcup \left\{\left|\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \varepsilon, \mathrm{S}_n \leqslant \frac{np}{2}\right\}$$
Pour n assez grand, on a $\frac{np}{2} \geqslant \mathrm{A}$ et par conséquent
$$\left\{\left|\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \varepsilon, \mathrm{S}_n > \frac{np}{2}\right\} = \varnothing$$
d'où
$$\mathbb{P}\left(\left|\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{B}_n)$$
Et on conclut
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\mathrm{Arctan}\,(\mathrm{S}_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Exercice 106 (*)

Soit $c = \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_p \end{pmatrix}$ un p-cycle de S_n. Pour $\sigma \in \mathrm{S}_n$, déterminer $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.

Corrigé : Soit $\gamma = \sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$. On vérifie que $\gamma(\sigma(i_k)) = \sigma(i_{k+1})$ pour tout $k \in [\![1\,; p-1]\!]$ et $\gamma(\sigma(i_p)) = \sigma(i_1)$. Par ailleurs, on a $\gamma(i) = i$ pour tout $i \notin \sigma(\mathrm{supp}\, c)$. Ainsi
$$\boxed{\forall \sigma \in \mathrm{S}_n \qquad \sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(i_1) & \ldots & \sigma(i_p) \end{pmatrix}}$$

Exercice 107 (*)

Soit $n \geqslant 2$. Calculer $$\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma)$$

Corrigé : Soit τ une transposition de S_n. L'application $\varphi : \mathrm{S}_n \to \mathrm{S}_n, \sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une permutation de S_n (c'est une involution). Par conséquent, on a

$$\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) = \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\tau\circ\sigma) = \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)$$

Or, la signature d'une transposition est égale à -1 et par conséquent

$$\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) = -\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma)$$

Ainsi $$\boxed{\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) = 0}$$

Variante : Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det \mathrm{A} = \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$. Ainsi, notant J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de 1, on a

$$\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) = \det \mathrm{J}$$

La matrice J contient (au moins) deux colonnes identiques et n'est donc pas inversible. On retrouve alors le résultat précédent.

Exercice 108 (*)

Soit $n \geqslant 2$ et $\sigma \in \mathrm{S}_n$. On note r le nombre de cycles dans la décomposition de σ en cycles à supports disjoints et p le nombre de points fixes. Déterminer $\varepsilon(\sigma)$ en fonction de n, r et p.

Corrigé : On note $\sigma = \prod_{i=1}^{r} c_i$ la décomposition en cycles à supports disjoints. Il vient

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^{r} \varepsilon(c_i) = \prod_{i=1}^{r} (-1)^{\ell(c_i)-1} = (-1)^{\sum_{i=1}^{r} \ell(c_i) - r}$$

où $\ell(c_i)$ désigne la longueur du cycle c_i pour $i \in [\![1\,; r]\!]$. Or, on a

$$n = p + \sum_{i=1}^{r} \ell(c_i)$$

Ainsi $$\boxed{\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-p-r}}$$

Exercice 109 (**)

Soient a, x, y, z des complexes. Calculer le déterminant d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{vmatrix} a & x & \dots & \dots & x \\ y & z & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ y & 0 & \dots & 0 & z \end{vmatrix}$$

Corrigé : Supposons $z \neq 0$. Avec l'opération $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \dfrac{x}{z}\sum_{i=2}^{n} \mathrm{L}_i$, on obtient

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a - \dfrac{(n-1)xy}{z} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ y & z & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ y & 0 & \dots & 0 & z \end{vmatrix} = z^{n-1}\left[a - \frac{(n-1)xy}{z}\right] = z^{n-2}\left[az - (n-1)xy\right]$$

Pour étendre le résultat précédent au cas $z = 0$, on constate qu'il faut considérer $n = 1$ à part. Supposons $z = 0$. Pour $n > 2$, le déterminant est clairement nul puisqu'il possède deux colonnes identiques. Et pour $n = 2$, on a

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & x \\ y & 0 \end{vmatrix} = -xy$$

Finalement, la formule obtenue pour $z \neq 0$ vaut aussi pour $z = 0$ et $n \geqslant 2$. On conclut

$$\boxed{\Delta_1 = a \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2 \qquad \Delta_n = z^{n-2}\left[az - (n-1)xy\right]}$$

Variante : On effectue $\mathrm{C}_k \leftarrow \mathrm{C}_k - \mathrm{C}_n$ pour $k \in [\![2\,;\, n-1]\!]$ puis on développe sur la première ligne.

Exercice 110 (**)

Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ avec n entier non nul. Montrer que si les matrices A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ alors elles le sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé : Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{AP} = \mathrm{PB}$. On note $\mathrm{P}_1 = \mathrm{Re}\,\mathrm{P}$ et $\mathrm{P}_2 = \mathrm{Im}\,\mathrm{P}$. On a $\mathrm{AP}_1 = \mathrm{P}_1\mathrm{B}$ et $\mathrm{AP}_2 = \mathrm{P}_2\mathrm{B}$ d'où $\mathrm{A}\varphi(t) = \varphi(t)\mathrm{B}$ avec $\varphi(t) = \mathrm{P}_1 + t\mathrm{P}_2$ pour tout $t \in \mathbb{C}$. D'après la formule du déterminant, on a $t \mapsto \det \varphi(t)$ polynomiale et $\det \varphi(\mathrm{i}) \neq 0$ puisque $\varphi(\mathrm{i}) = \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Par conséquent, il existe t_0 réel tel que $\det \varphi(t_0) \neq 0$ et par conséquent

$$\mathrm{A}\varphi(t_0) = \varphi(t_0)\mathrm{B} \quad \text{avec} \quad \varphi(t_0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

Ainsi $\boxed{\text{Les matrices A et B sont semblables dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

Exercice 111 (***)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi. On définit

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathrm{V}(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)(\omega) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \mathrm{X}_1(\omega) & \dots & \mathrm{X}_n(\omega) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{X}_1^{n-1}(\omega) & \dots & \mathrm{X}_n^{n-1}(\omega) \end{vmatrix}$$

Déterminer $\mathbb{E}(\mathrm{V}(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n))$.

Corrigé : On a $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3 \dots, \mathrm{X}_n) \sim (\mathrm{X}_2, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_3, \dots, \mathrm{X}_n)$. En effet, pour $(x_1, \dots, x_n) \in [\![1\,;\, n]\!]^n$, il vient par indépendance

$$\mathbb{P}((\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \dots, \mathrm{X}_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = x_i)$$

puis par égalité en loi

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = x_i) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_2 = x_1)\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = x_2) \prod_{i=3}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = x_i)$$

et à nouveau par indépendance

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_2 = x_1)\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = x_2) \prod_{i=3}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = x_i) = \mathbb{P}((\mathrm{X}_2, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_3, \ldots, \mathrm{X}_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

d'où l'égalité en loi annoncée. Il s'ensuit

$$\mathbb{E}(\mathrm{V}_n(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \ldots, \mathrm{X}_n)) = \mathbb{E}(\mathrm{V}_n(\mathrm{X}_2, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_3, \ldots, \mathrm{X}_n))$$

Or, d'après les propriétés du déterminant, on a

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathrm{V}_n(\mathrm{X}_2, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_3, \ldots, \mathrm{X}_n)(\omega) = -\mathrm{V}_n(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \ldots, \mathrm{X}_n)(\omega)$$

Par linéarité de l'espérance, il en résulte que

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{V}_n(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)) = 0}$$

Variante : Par transfert, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{V}_n(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)) &= \frac{1}{n^n} \sum_{(x_1, \ldots, x_n) \in (\llbracket 1\,;\, n \rrbracket^n)^n} \mathrm{V}(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \frac{1}{n^n} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \mathrm{V}(\sigma(1), \ldots, \sigma(n)) = \frac{1}{n^n} \mathrm{V}_n(1, \ldots, n) \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) = 0
\end{aligned}$$

Mais cette approche requiert l'utilisation de la signature.

Exercice 112 (**)

Nature de la série de terme général $\sin\left(\pi\sqrt{n^4+1}\right)$.

Corrigé : Pour n entier non nul, il vient

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^4+1}\right) = \sin\left(\pi n^2 \sqrt{1 + \frac{1}{n^4}}\right)$$

On a le développement usuel $\qquad \sqrt{1+u} \underset{u \to 0}{=} 1 + \dfrac{u}{2} + \mathrm{o}(u)$

d'où

$$\begin{aligned}
\sin\left(\pi\sqrt{n^4+1}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \sin\left(\pi n^2 \left(1 + \frac{1}{2n^4} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \sin\left(\pi n^2 + \frac{\pi}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n^2} \sin\left(\frac{\pi}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\left|\sin\left(\pi\sqrt{n^4+1}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n^2}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{La série } \sum \sin\left(\pi\sqrt{n^4+1}\right) \text{ converge absolument.}}$$

Exercice 113 (**)

Vérifier la convergence puis calculer la somme de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

Corrigé : La série vérifie le critère des séries alternées puisque la suite $\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)_n$ décroît et tend vers zéro. Avec l'égalité $\displaystyle\int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2k+1}$ pour k entier, on a pour n entier par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Puis $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{2(n+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3}$$

Ainsi $$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ converge et sa somme vaut } \frac{\pi}{4}.}$$

Exercice 114 (**)

Étudier la nature de la suite de terme général $u_n = \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \dfrac{\sqrt{n}}{n!}$.

Indication : considérer $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

Corrigé : Soit n entier. On pose $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. On a

$$v_n = \ln\left[\mathrm{e}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right] = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Avec le développement $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \mathrm{O}(u^3)$, il vient

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum v_n \text{ converge absolument.}}$$

La série téléscopique $\sum_{n\geqslant 1} v_n = \sum_{n\geqslant 1} [\ln u_{n+1} - \ln u_n]$ converge et par conséquent la suite $(\ln u_n)_n$ admet une limite finie. Passant à l'exponentielle, on obtient

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{C} \quad \text{avec} \quad \mathrm{C} > 0}$$

Remarque : On a donc établi

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{K}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{K} > 0$$

Il s'agit de l'équivalent de *de Moivre* avec une constante K non explicite, contribution que l'on doit à *Stirling*.

Exercice 115 (Constante γ d'Euler **)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Corrigé : On pose $v_n = u_n - u_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$. On a
$$v_n = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
On en déduit la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ d'après le critère de Riemann et comme c'est une série téléscopique, sa convergence équivaut à celle de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'où
$$\boxed{\exists \gamma \in \mathbb{R} \quad | \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma}$$

Exercice 116 (*)

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ bijective. Étudier la nature des séries de terme général :

1. $\dfrac{1}{\sigma(n) + n^2}$
2. $\dfrac{1}{\sigma(n)^2 + n}$

Corrigé : 1. On a $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant \frac{1}{\sigma(n) + n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

d'où $$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sigma(n) + n^2} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

$$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{\sigma(n) + n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est sommable.}}$$

2. On a $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant \frac{1}{\sigma(n)^2 + n} \leqslant \frac{1}{\sigma(n)^2}$$

Or, on dispose de l'équivalence
$$\left(\frac{1}{\sigma(n)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^1(\mathbb{N}^*) \iff \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^1(\mathbb{N}^*)$$
Et comme on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} < +\infty$, on conclut
$$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{\sigma(n)^2 + n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est sommable.}}$$

Exercice 117 (**)

Soit α réel. Étudier la somme $\sum\limits_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \dfrac{1}{(m+n)^\alpha}$.

Corrigé : Pour $p \geqslant 2$, on pose

$$\mathrm{I}_p = \big\{(n,m) \in \mathbb{N}^{*2} \mid m+n=p\big\} = \{(k,p-k), k \in [\![1\,;\,p-1]\!]\}$$

La famille $(\mathrm{I}_p)_{p\geqslant 2}$ est un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}^{*2}$. D'après le théorème de sommation par paquets pour une famille à termes positifs, il vient

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{(m+n)^\alpha} = \sum_{p=2}^{+\infty}\left(\sum_{(m,n)\in \mathrm{I}_p}\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right) = \sum_{p=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{p^\alpha}\right) = \sum_{p=2}^{+\infty}\frac{p-1}{p^\alpha}$$

Or, on a
$$\frac{p-1}{p^\alpha} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$$

D'après le critère des équivalents, licite pour des familles positives, et le critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ est sommable si et seulement si } \alpha > 2.}$$

Exercice 118 (**)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Justifier l'existence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2-z^2}$ puis montrer

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2-z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\zeta(2k+2)z^{2k} \quad \text{avec} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$$

Corrigé : Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. La sommabilité de $\left(\dfrac{1}{n^2-z^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ équivaut à la convergence absolue de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2-z^2}$ et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{|n^2-z^2|} \leqslant \frac{1}{n^2-|z|^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où la convergence absolue par comparaison et critère de Riemann. Puis, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-z^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\frac{1}{1-\left(\frac{z}{n}\right)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^{2k}$$

Vérifions la sommabilité de la famille concernée afin de pouvoir appliquer le théorème de Fubini. La série géométrique $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{|z|}{n}\right)^{2k}$ converge avec

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{|z|}{n}\right)^{2k} = \frac{1}{1-\left(\frac{|z|}{n}\right)^2}$$

puis la série
$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}\frac{1}{1-\left(\frac{|z|}{n}\right)^2} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2-|z|^2}$$

converge d'après les résultats antérieurs. Ainsi, d'après le théorème de Fubini, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-z^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^{2k}}{n^{2(k+1)}} = \sum_{k=0}^{+\infty}z^{2k}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2(k+1)}}$$

On conclut

$$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{n^2-z^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est sommable avec } \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2-z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\zeta(2(k+1))z^{2k}.}$$

Exercice 119 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On pose

$$\forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \int_0^{\pi} \mathrm{P}(\cos\theta)\mathrm{Q}(\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

Justifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Corrigé : Pour $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}$, l'intégrale définissant $\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur un segment, l'intégrande $\theta \mapsto \mathrm{P}(\cos\theta)\mathrm{Q}(\cos\theta)$ étant continue sur $[\,0\,;\pi\,]$. La forme est clairement symétrique, linéaire en la première variable par linéarité du produit à gauche et linéarité de l'intégrale. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, on a

$$\langle \mathrm{P},\mathrm{P}\rangle = \int_0^{\pi} \mathrm{P}^2(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \geqslant 0$$

par positivité de l'intégrale. Enfin, si $\langle \mathrm{P},\mathrm{P}\rangle = 0$, l'intégrande $\theta \mapsto \mathrm{P}^2(\cos\theta)$ étant continue positif sur $[\,0\,;\pi\,]$, il vient

$$\forall \theta \in [\,0\,;\pi\,] \qquad \mathrm{P}^2(\cos\theta) = 0$$

d'où
$$\forall \theta \in [\,0\,;\pi\,] \qquad \mathrm{P}(\cos\theta) = 0$$

Or, la fonction $\theta \mapsto \cos\theta$ réalise une surjection de $[\,0\,;\pi\,]$ sur $[\,-1\,;1\,]$ d'où

$$\forall t \in [\,-1\,;1\,] \qquad \mathrm{P}(t) = 0$$

Ainsi, le polynôme P admet une infinité de racines ce qui prouve qu'il s'agit du polynôme nul.

On conclut $\boxed{\text{L'application } (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2 \mapsto \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle \text{ est un produit scalaire sur E.}}$

Exercice 120 (**)

Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\sqrt{k} < \sqrt{2^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k}$$

Corrigé : On munit $\mathbb{R}^{n+1}$ de sa structure euclidienne canonique. On choisit

$$x = \left(0, \sqrt{\tbinom{n}{1}}, \sqrt{2\tbinom{n}{2}}, \ldots \sqrt{n\tbinom{n}{n}}\right) \qquad y = \left(\sqrt{\tbinom{n}{0}}, \sqrt{\tbinom{n}{1}}, \ldots, \sqrt{\tbinom{n}{n}}\right)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\langle x,y\rangle = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{k} \leqslant \|x\|\|y\| = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)}$$

Enfin, le cas d'égalité n'est pas réalisé car les vecteurs ne sont pas colinéaires et on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{k} < \sqrt{2^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k}}$$

Remarques : 1. On sait calculer $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k$ ...

2. On peut aussi considérer $\mathbb{R}^{n+1}$ muni du produit scalaire

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{n+1})^2 \qquad \langle x,y\rangle = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_k y_k$$

Exercice 121 (**)

Soit E euclidien et F, G des sev de E.

1. Déterminer $(\mathrm{F}+\mathrm{G})^{\perp}$.
2. En déduire $(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})^{\perp}$.

Corrigé : 1. On a $\mathrm{F}\subset\mathrm{F}+\mathrm{G}$ et $\mathrm{G}\subset\mathrm{F}+\mathrm{G}$ d'où $(\mathrm{F}+\mathrm{G})^{\perp}\subset\mathrm{F}^{\perp}$ et $(\mathrm{F}+\mathrm{G})^{\perp}\subset\mathrm{G}^{\perp}$. Ainsi, on a $(\mathrm{F}+\mathrm{G})^{\perp}\subset\mathrm{F}^{\perp}\cap\mathrm{G}^{\perp}$. Réciproquement, soit $x\in\mathrm{F}^{\perp}\cap\mathrm{G}^{\perp}$ et $(u,v)\in\mathrm{F}\times\mathrm{G}$. On a

$$\langle x,u+v\rangle=\langle x,u\rangle+\langle x,v\rangle=0$$

d'où l'inclusion $\mathrm{F}^{\perp}\cap\mathrm{G}^{\perp}\subset(\mathrm{F}+\mathrm{G})^{\perp}$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{F}^{\perp}\cap\mathrm{G}^{\perp}=(\mathrm{F}+\mathrm{G})^{\perp}}$$

2. En appliquant le résultat antérieur à $\mathrm{F}^{\perp}$ et $\mathrm{G}^{\perp}$, il vient

$$\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=(\mathrm{F}^{\perp}+\mathrm{G}^{\perp})^{\perp}$$

Passant à l'orthogonal, on obtient $\boxed{(\mathrm{F}\cap\mathrm{G})^{\perp}=\mathrm{F}^{\perp}+\mathrm{G}^{\perp}}$

Exercice 122 (**)

Justifier l'existence puis calculer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1\left(1+at+bt^2\right)^2\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : Notons $$\Lambda=\left\{\int_0^1(1+at+bt^2)^2\,\mathrm{d}t,(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

C'est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée donc elle admet une borne inférieure finie. On pose $\mathrm{E}=\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ muni du produit scalaire $\langle\mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle=\displaystyle\int_0^1\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$ pour $(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in\mathrm{E}^2$ et on note $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\,(\mathrm{X},\mathrm{X}^2)$. En utilisant notamment la croissance et continuité de $u\mapsto u^2$ sur $\mathbb{R}_+$

$$\operatorname{Inf}\Lambda=\operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\|1+a\mathrm{X}+b\mathrm{X}^2\|^2=\left(\operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\|1-(-a\mathrm{X}-b\mathrm{X}^2)\|\right)^2=\mathrm{d}(1,\mathrm{F})^2$$

Comme le sev F est de dimension finie, on a par caractérisation métrique du projeté orthogonal

$$\mathrm{d}(1,\mathrm{F})=\|1-p_{\mathrm{F}}(1)\|$$

Par caractérisation géométrique du projeté orthogonal, il vient pour $\mathrm{P}\in\mathrm{E}$

$$\mathrm{P}=p_{\mathrm{F}}(1)\iff\begin{cases}\mathrm{P}\in\mathrm{F}\\1-\mathrm{P}\in\mathrm{F}^{\perp}\end{cases}\iff\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\quad|\quad\begin{cases}\mathrm{P}=\alpha\mathrm{X}+\beta\mathrm{X}^2\\\langle1-\mathrm{P},\mathrm{X}\rangle=0\\\langle1-\mathrm{P},\mathrm{X}^2\rangle=0\end{cases}$$

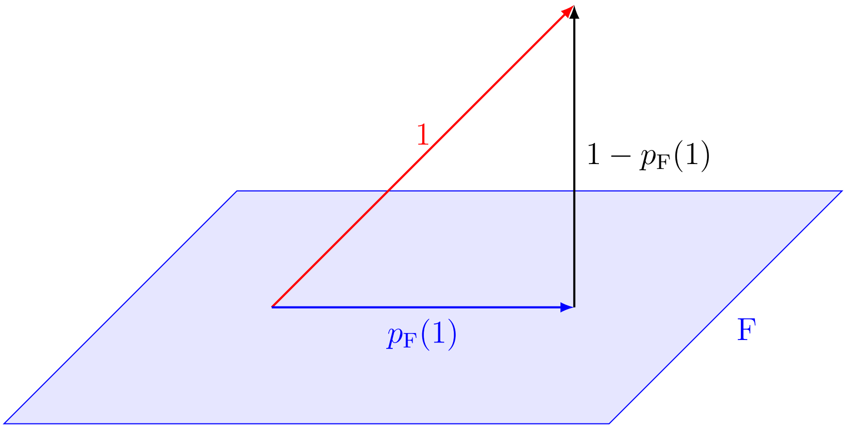


FIGURE 6 – Distance à un sev de dimension finie

Ainsi, les scalaires α, β sont solutions de

$$\begin{cases} \langle \mathrm{X}, \mathrm{X} \rangle \alpha + \langle \mathrm{X}^2, \mathrm{X} \rangle \beta = \langle 1, \mathrm{X} \rangle \\ \langle \mathrm{X}, \mathrm{X}^2 \rangle \alpha + \langle \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^2 \rangle \beta = \langle 1, \mathrm{X}^2 \rangle \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\beta}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\alpha}{4} + \dfrac{\beta}{5} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \iff (\alpha, \beta) = \left(4, -\frac{10}{3}\right)$$

Enfin $$\|1 - p_{\mathrm{F}}(1)\|^2 = \langle 1 - p_{\mathrm{F}}(1), 1 \rangle = \int_0^1 \left(1 - 4t + \frac{10}{3} t^2\right) \mathrm{d}t$$

On conclut $$\boxed{\operatorname*{Inf}_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (1 + at + bt^2)^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{9}}$$

Exercice 123 (*)

Soit E préhilbertien réel et a vecteur normé de E. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = x - \langle x, a \rangle \, a$$

1. Justifier que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ puis décrire f.
2. On suppose E euclidien muni de $\mathscr{B}$ une base orthonormée. On note $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} a$. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f$.

Corrigé : 1. L'application f est clairement à valeurs dans E, linéaire par bilinéarité du produit scalaire et du produit externe. Ainsi

$$\boxed{f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

La famille (a) est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}\,(a)$. L'application $x \in \mathrm{E} \mapsto \langle x, a \rangle \, a$ est le projecteur sur $\mathrm{Vect}\,(a)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\,(a)^{\perp}$ et par conséquent

$$\boxed{\text{L'application } f = \mathrm{id} - p_{\mathrm{Vect}\,(a)} \text{ est le projecteur sur } \mathrm{Vect}\,(a)^{\perp} \text{ parallèlement à } \mathrm{Vect}\,(a).}$$

Vocabulaire : Les projecteurs $p_{\mathrm{Vect}\,(a)}$ et $\mathrm{id} - p_{\mathrm{Vect}\,(a)}$ sont *associés*. Ils sont dits projecteurs *orthogonaux* puisque leurs images et noyaux sont orthogonaux.

2. Soit $x \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{X} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} x$. Par symétrie du produit scalaire, interprétation du produit externe comme produit par une matrice scalaire puis associativité du produit matriciel, il vient en notant $\mathrm{B} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f$

$$
\begin{aligned}
f(x) = x - 2\langle a, x\rangle a \iff \mathrm{BX} &= \mathrm{X} - 2\left(\mathrm{A}^\top \mathrm{X}\right)\mathrm{A} \\
&= \mathrm{X} - 2\mathrm{A}\left(\mathrm{A}^\top \mathrm{X}\right) = \mathrm{X} - 2\left(\mathrm{A}\mathrm{A}^\top\right)\mathrm{X} = \left(\mathrm{I}_n - 2\mathrm{A}\mathrm{A}^\top\right)\mathrm{X}
\end{aligned}
$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f = \mathrm{I}_n - 2\mathrm{A}\mathrm{A}^\top}$$