Équivalents usuels

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$$

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

$$\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\mathrm{sh}\,(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\mathrm{ch}\,(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$x^\alpha - 1 \underset{x\to 1}{\sim} \alpha(x-1) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{Arcsin}\,(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\mathrm{Arccos}\,(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{Arctan}\,(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\sin(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$$

$$\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\mathrm{sh}\,(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{6}$$

$$\mathrm{ch}\,(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

Développements limités usuels (en zéro)

Définition 1. *Soit f définie sur un intervalle I non vide, non réduit à un point. On dit que f admet un développement limité en $a \in \mathrm{I}$ à l'ordre n s'il existe des scalaires $a_0, \ldots, a_n$ tels que*

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Proposition 1. *Si f admet un développement limité en $a \in \mathrm{I}$ à l'ordre n, alors ce développement est unique.*

Proposition 2. *Soit f définie sur un intervalle I centré en zéro et qui admet un développement limité en zéro à l'ordre n.*

- *Si f est paire, les termes d'ordre impair sont nuls ;*
- *Si f est impaire, les termes d'ordre pair sont nuls.*

Remarque : Les développements qui suivent sont écrits avec une relation O ce qui améliore, sans effort, la précision du développement.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \mathrm{O}(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \mathrm{O}(x^{n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathrm{O}(x^{n+1})$$

$$\mathrm{Arctan}\,(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{O}(x^{2n+3})$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \ldots + -\frac{x^n}{n} + \mathrm{O}(x^{n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \mathrm{O}(x^{n+1})$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{O}(x^{n+1})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{O}(x^{2n+3})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{O}(x^{2n+2})$$

$$\mathrm{sh}\,(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{O}(x^{2n+3})$$

$$\mathrm{ch}\,(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{O}(x^{2n+2})$$