

Équivalents usuels

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$$

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$$

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$$

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$x^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \alpha(x-1) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\operatorname{Arccos}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\sin(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$$

$$\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\operatorname{sh}(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{6}$$

$$\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

Développements limités usuels (en zéro)

Définition 1. Soit f définie sur un intervalle I non vide, non réduit à un point. On dit que f admet un développement limité en $a \in I$ à l'ordre n s'il existe des scalaires $a_0, \dots, a_n$ tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Proposition 1. Si f admet un développement limité en $a \in I$ à l'ordre n , alors ce développement est unique.

Proposition 2. Soit f définie sur un intervalle I centré en zéro et qui admet un développement limité en zéro à l'ordre n .

- Si f est paire, les termes d'ordre impair sont nuls ;
- Si f est impaire, les termes d'ordre pair sont nuls.

Remarque : Les développements qui suivent sont écrits avec une relation O ce qui améliore, sans effort, la précision du développement.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + O(x^{n+1}) \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + O(x^{n+1}) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + O(x^{n+1}) \\ \text{Arctan}(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3}) \\ \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots - \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1}) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1}) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}) \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3}) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}) \\ \text{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3}) \\ \text{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}) \end{aligned}$$