ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°03

Exercice 1 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et a réel. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ convergente. Montrer que pour tout $x \geqslant a$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé : Par continuité de f, on a $\mathrm{F} : y \mapsto \displaystyle\int_0^{y} f(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x > a$, on note $\delta = x - a > 0$. On a $\mathrm{F}(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ d'où $\mathrm{F}(y) \underset{y\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$ et par conséquent

$$\mathrm{F}(y)\mathrm{e}^{-\delta y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(t)\mathrm{e}^{-\delta t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-\delta t}) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc le crochet $\left[\mathrm{F}(t)\mathrm{e}^{-\delta t}\right]_0^{+\infty}$ est fini et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{F}(t)\mathrm{e}^{-\delta t}\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, on conclut

$$\boxed{\text{Pour } x \geqslant a, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Exercice 2 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;+\infty\,[\,, \mathbb{R})$ intégrable.

1. On suppose f uniformément continue. Montrer $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
2. On suppose désormais f de classe $\mathscr{C}^1$ et $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} f'(t)^2\mathrm{d}t$ bornée. Montrer $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Corrigé : 1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad |x-y| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Soit $x \geqslant 0$. On a $\qquad \forall t \in [\,x\,;x+\eta\,] \qquad |f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

Ainsi, par inégalité triangulaire

$$\left|f(x) - \frac{1}{\eta}\int_x^{x+\eta} f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{\eta}\left|\int_x^{x+\eta}(f(x)-f(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\eta}\int_x^{x+\eta}|f(x)-f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

d'où $$|f(x)| \leqslant \left|f(x) - \frac{1}{\eta}\int_x^{x+\eta} f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \frac{1}{\eta}\left|\int_x^{x+\eta} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon + \frac{1}{\eta}\left|\int_x^{x+\eta} f(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

Or $$\int_x^{x+\eta} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x+\eta} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Ainsi, il existe un seuil $\mathrm{A} \geqslant 0$ tel que, pour $x \geqslant \mathrm{A}$, on ait $|f(x)| \leqslant 2\varepsilon$, autrement dit

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

2. Soit $y > x$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|f(y)-f(x)| = \left|\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_x^y f'(t)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_x^y \mathrm{d}t}$$

On a $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|\int_x^{x+1} f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{M} \quad \text{avec} \quad \mathrm{M} \geqslant 0$

Puis, notant $p = \lfloor y-x \rfloor$, on a

$$\int_x^y f'(t)^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{p-1}\int_{x+k}^{x+k+1} f'(t)^2\,\mathrm{d}t + \int_{x+p}^{y} f'(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant (p+1)\mathrm{M} \leqslant \mathrm{M}(y-x+1)$$

Ainsi $\qquad |f(y)-f(x)| \leqslant \sqrt{\mathrm{M}}\sqrt{(y-x+1)(y-x)}$

Notant $\omega(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)}$, on a $\omega(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{=} \mathrm{o}(1)$ et l'uniforme continuité en découle. Par application du résultat précédent, on conclut

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

Exercice 3 (***)

On note $\qquad \mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t$

1. Justifier la convergence de I et J et établir l'égalité $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.
2. En déduire la valeur de I et J.

Corrigé : 1. Notons $f(t) = \ln(\sin(t))$ pour $t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. On a $f \in \mathscr{C}^0\left(\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right],\mathbb{R}\right)$. Avec le développement usuel $\sin(t) = t + \mathrm{o}(t)$, il vient

$$\ln(\sin(t)) = \ln(t) + \ln(1+\mathrm{o}(1)) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, la fonction f est intégrable sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Avec le changement de variables $t = \frac{\pi}{2} - u$, les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. Ainsi

$$\boxed{\text{Les intégrales } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t \text{ sont convergentes et égales.}}$$

2. Par linéarité de l'intégrale car convergence, on a

$$\mathrm{I}+\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln(\sin(t)) + \ln(\cos(t))]\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)\cos(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)\,\mathrm{d}t$$

Toujours par linéarité $\qquad \mathrm{I}+\mathrm{J}+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\,\mathrm{d}t$

Avec le changement de variables $u = 2t$, les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. Ainsi

$$2\left(\mathrm{I} + \mathrm{J} + \frac{\pi}{2}\ln(2)\right) = \int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

D'après la relation de Chasles, il vient

$$2\left(\mathrm{I} + \mathrm{J} + \frac{\pi}{2}\ln(2)\right) - \mathrm{I} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

Un dernier changement de variable $t = u + \dfrac{\pi}{2}$ fournit l'égalité

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right)\right)\,\mathrm{d}u = \mathrm{J}$$

Ainsi $$2\left(\mathrm{I} + \mathrm{J} + \frac{\pi}{2}\ln(2)\right) - \mathrm{I} = \mathrm{J} \quad \text{et} \quad \mathrm{I} = \mathrm{J}$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{I} = \mathrm{J} = -\frac{\pi\ln(2)}{2}}$$

Exercice 4 (***)

Déterminer la nature des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right)\,\mathrm{d}t$$

puis commenter.

Corrigé : Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto 1 - \cos(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. On a

$$\frac{1-\cos(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t\sqrt{t}}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Par intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. On a

$$\frac{1-\cos(t)}{t\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t\sqrt{t}}$ est donc convergente car faussement impropre. Puis

$$\frac{1-\cos(t)}{t\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$

Par critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge (absolument) et on en déduit la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t\sqrt{t}}$ et par conséquent

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Avec le développement limité usuel $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \dfrac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2)$, il vient

$$\ln\left(1+\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right) \underset{t\to+\infty}{=} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} + f(t) \quad \text{avec} \quad f(t) = -\frac{\sin(t)^2}{2t} + \mathrm{o}\left(\frac{\sin(t)^2}{t}\right)$$

Déterminons la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t}\,\mathrm{d}t$. Soit n entier. On a

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)^2}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)^2}{t}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)^2}{u+k\pi}\,\mathrm{d}u \\ &\geqslant \left(\int_0^{\pi}\sin(u)^2\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{H}_n \quad \text{avec} \quad \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

Or, la série à termes positifs dite *harmonique* $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge d'après le critère de Riemann et par conséquent $\mathrm{H}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. On en déduit par comparaison que $\displaystyle\int_0^{n\pi}\frac{\sin(t)^2}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ d'où la divergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)^2}{t}\,\mathrm{d}t$. On a

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\frac{\sin(t)^2}{2t} \leqslant 0$$

ce qui garantit que f est de signe constant négatif pour t assez grand et rend licite l'usage du critère des équivalents. On en déduit la divergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$ convergeait, on aurait par linéarité de l'intégrale que

$$\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right) - \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right]\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}$$

ce qui est faux. On en déduit

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right)\,\mathrm{d}t \text{ diverge.}}$$

On a
$$\ln\left(1+\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$$

et pourtant les intégrales de ces fonctions ne sont pas de même nature. Il n'y a pas de contradiction. Le critère des équivalents donne une même nature pour des intégrales de fonctions équivalentes positives ou plus généralement de signe constant (en considérant leurs opposées pour se ramener au cas positif). Dans le cas présent, les fonctions ne sont pas de signe constant ce qui explique le phénomène observé.

Exercice 5 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que f^2 intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : 1. Notons $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 0$. D'après le théorème fondamental d'analyse, on a $\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avec $\mathrm{F}' = f$. Par suite

$$\forall x > 0 \qquad g(x) = \frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \mathrm{F}'(0) = f(0)$$

Ainsi $\boxed{\text{La fonction } g \text{ se prolonge par continuité en } 0.}$

2. On procède par intégration par parties. On a

$$\int^x g(t)^2\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{F}(x)^2}{x}\right] + \int^x \left[\frac{2f(t)}{t}\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right]\,\mathrm{d}t$$

en particulier
$$\frac{\mathrm{F}(x)^2}{x} = x\left(\frac{\mathrm{F}(x)}{x}\right)^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

d'où
$$\forall a \geqslant 0 \qquad \int_0^a g(x)^2\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{F}(a)^2}{a} + 2\int_0^a g(x)f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^a g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\forall a \geqslant 0 \qquad \left(\int_0^a g(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\left(\int_0^a g(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\int_0^a g(x)^2\,\mathrm{d}x \int_0^a f(x)^2\,\mathrm{d}x$$

En supposant f non identiquement nulle et par conséquent g non plus, on obtient

$$\forall a \geqslant 0 \qquad \int_0^a g(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^a f(x)^2\,\mathrm{d}x$$

On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } g^2 \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et on a } \int_0^{+\infty} g(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t.}$$

Exercice 6 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;+\infty\,[\,,\,]\,0\,;+\infty\,[)$ telle que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} a \quad \text{avec} \quad a < 0$$

Montrer que f et f' sont intégrables sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Corrigé : On a
$$\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\sim} a$$

Quitte à multiplier par -1, on peut se ramener au cas d'une constante positive. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} a\,\mathrm{d}t$ diverge clairement et par intégration des relations de comparaison, il vient

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\sim} \int_0^x a\,\mathrm{d}t = ax$$

c'est-à-dire
$$\ln\left(\frac{f(x)}{f(0)}\right) = ax + \mathrm{o}(x)$$

d'où
$$\ln(x^2 f(x)) = 2\ln(x) + ax + \mathrm{o}(x) - \ln(f(0)) = ax + \mathrm{o}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$$

autrement dit $$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et $$f'(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} af(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

On conclut $\boxed{\text{Les fonctions } f \text{ et } f' \text{ sont intégrables sur } [\,0\,;+\infty\,[.}$

Exercice 7 (****)

Pour α réel, on pose $$\forall t \geqslant 1 \qquad f_\alpha(t) = \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$$

Discuter en fonction de α de la convergence et de la convergence absolue de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : La fonction f_α est continue par morceaux sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Pour $\alpha > 1$, on a $\left|\dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha}$ d'où l'intégrabilité de f_α sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Pour $\alpha \in \,]\,0\,;1\,]$, on procède en intégrant par parties. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ et $t \mapsto -\cos(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$ et
$$-\frac{\cos(t)}{t^\alpha} \xrightarrow[t\to1]{} -\cos(1) \qquad -\frac{\cos(t)}{t^\alpha} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$
Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\alpha\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$$
sont de même nature. Or, la seconde converge absolument puisque $1+\alpha > 1$ et la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ s'ensuit. Par ailleurs, on a
$$\forall t \geqslant 1 \qquad \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} \geqslant \frac{\sin(t)^2}{t^\alpha} = \frac{1-\cos(2t)}{2t^\alpha}$$
L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge par un argument similaire à précédemment avec une intégration par parties et un raisonnement par l'absurde garantit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge. Par comparaison, on conclut que la fonction f_α n'est pas intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Supposons enfin $\alpha \leqslant 0$. En observant $t^{-\alpha} \geqslant 1$ pour $t \geqslant 1$, on obtient
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}} t^{-\alpha}\sin(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}} t^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$
Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ était convergente, on aurait
$$\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^{2n\pi+\frac{\pi}{4}} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
ce qui contredit la minoration précédente. Ainsi

$\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge absolument pour } \alpha > 1, \text{ converge mais pas absolument pour } \alpha \in \,]\,0\,;1\,] \text{ et diverge pour } \alpha \leqslant 0.}$