ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°01

Exercice 1 (*)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t\,\mathrm{sh}\,(t)}}$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(t+\frac{1}{t}\right)}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$

Exercice 2 (**)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)}$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt[3]{t}-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 3 (*)

Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^2}$
2. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$

Exercice 4 (*)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^1 \ln(t)^n\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que I_n est bien définie pour tout n entier.
2. Pour n entier non nul, déterminer une relation entre I_n et I_{n-1}.
3. En déduire une expression de I_n pour tout n entier.

Exercice 5 (**)

Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-t^2}{1-t^2+t^4}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 6 (**)

On pose $$\forall a > 0 \qquad \mathrm{I}(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que $\mathrm{I}(a)$ est bien définie pour tout $a > 0$.
2. Calculer $\mathrm{I}(1)$.
3. En déduire la valeur de $\mathrm{I}(a)$ pour tout $a > 0$.

Exercice 7 (**)

1. Montrer la convergence et l'égalité des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1}\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$.

Exercice 8 (*)

Montrer $$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-x})$$

Exercice 9 (**)

Montrer $$\int_0^x \mathrm{th}\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$$