ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°02

Exercice 1 (**)

Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}+\cos(t)}$

Exercice 2 (**)

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge et préciser sa valeur en cas de convergence.
2. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ avec $x>0$.

Exercice 3 (**)

Soient a, b réels avec $a<b$ puis $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ convergente. Vérifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} [f(a+t)-f(b+t)]\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4 (Intégrales de Bertrand ***)

Étudier, en fonction des réels α et β, la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \ln(t)^\beta}$.

Exercice 5 (***)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\mathrm{th}\,(t))\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$

Exercice 6 (***)

Vérifier l'existence puis calculer

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)}$$

Exercice 7 (***)

1. Justifier l'existence de $$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$
2. Montrer que $\displaystyle\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathrm{I}$ puis en déduire la valeur de I.

Exercice 8 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^2([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$. On suppose f et f'' intégrables.

1. Montrer $$f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
2. Montrer que le produit ff' est intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Exercice 9 (**)

Déterminer un équivalent simple pour $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10 (**)

On pose $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que F est définie, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et préciser ses variations.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{F}(x)$ puis un équivalent de $\mathrm{F}(x)$ pour $x \to 0^+$.

Exercice 11 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$ décroissante positive. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Montrer que f est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ si et seulement si $(\mathrm{S}_n)_n$ converge et dans ce cas

$$\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 12 (***)

Soit $\alpha > 0$. Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right)\,\mathrm{d}t$.