ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°03

Exercice 1 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et a réel. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ convergente. Montrer que pour tout $x \geqslant a$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ converge.

Indications : Poser $\mathrm{F} : y \mapsto \displaystyle\int_0^{y} f(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ puis considérer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{F}(t)\mathrm{e}^{-\delta t}\,\mathrm{d}t$ avec $\delta = x - a > 0$.

Exercice 2 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,; {+\infty}\,[\,, \mathbb{R})$ intégrable.

1. On suppose f uniformément continue. Montrer $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.
2. On suppose désormais f de classe $\mathscr{C}^1$ et $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} f'(t)^2\mathrm{d}t$ bornée. Montrer $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Indications : 1. Pour $x \geqslant 0$, majorer $|f(x)|$ en intégrant f sur un intervalle suffisamment petit.
2. Pour $y \geqslant x$, écrire $f(y) - f(x)$ comme une intégrale puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et ensuite la relation de Chasles.

Exercice 3 (***)

On note
$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier la convergence de I et J et établir l'égalité $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.
2. En déduire la valeur de I et J.

Indications : 1. Établir que $\ln(\sin(t)) \underset{t \to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ puis utiliser le changement de variables $t = \dfrac{\pi}{2} - u$.
2. Calculer $\mathrm{I} + \mathrm{J}$ puis utiliser des transformations trigonométriques.

Exercice 4 (***)

Déterminer la nature des intégrales
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right)\,\mathrm{d}t$$
puis commenter.

Indications : Utiliser une intégration par parties pour déterminer la nature de la première intégrale. Pour la seconde, procéder à un développement limité à l'ordre deux de $\ln(1+u)$ et utiliser soit une intégration par parties, soit une comparaison à une somme avec un découpage par relation de Chasles.

Exercice 5 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f^2 intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Indications : 1. Notant $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 0$, reconnaître un taux d'accroissement.
2. En intégrant par partie, déterminer une primitive de g^2 en fonction de F. En déduire que pour $a \geqslant 0$, on a $\displaystyle\int_0^a g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^a g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ puis exploiter l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 6 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;+\infty\,[\,,]\,0\,;+\infty\,[)$ telle que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} a \quad \text{avec} \quad a < 0$$

Montrer que f et f' sont intégrables sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Indications : Intégrer une relation de comparaison.

Exercice 7 (****)

Pour α réel, on pose $\qquad \forall t \geqslant 1 \qquad f_\alpha(t) = \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}$

Discuter en fonction de α de la convergence et de la convergence absolue de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$.

Indications : Pour $\alpha \in [\,0\,;1\,[$, procéder en intégrant par parties pour établir la convergence. Pour la convergence absolue, utiliser l'inégalité $|\sin(t)| \geqslant \sin(t)^2$ pour t réel. Si $\alpha \leqslant 0$, minorer par exemple la quantité

$$\int_1^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^{2n\pi+\frac{\pi}{4}} f_\alpha(t)$$

avec n entier et conclure à une contradiction avec la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$.