ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026 08/09/25

Préparation à l'interrogation n°01

1 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\ln(1+x)$;
2. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$;
3. $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{n\left(-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \mathrm{e}^{-1+\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$.

2 Croissances comparées

Soient α, $\beta > 0$. On a

$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad x^\beta \mathrm{e}^{-\alpha x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad x^\alpha \ln(x)^\beta \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \qquad \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

3 Formules

1. Taylor reste intégral
2. $x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$

4 Trigonométrie

1. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
2. $\cos(t)^2 = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$;
3. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$;
4. $\sin(t)^2 = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$.

5 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ avec $\alpha \neq 1$;
2. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$;
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}$ avec $a \neq 0$;

6 Techniques

Pour $t \in \left]-\pi\,;\pi\right[$, posant $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right) \iff t = 2\,\mathrm{Arctan}\,(u)$, on a

$$\cos(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 = \cos\left(\frac{t}{2}\right)^2(1-u^2) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\sin(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)u = \frac{2u}{1+u^2}$$

et

$$\mathrm{d}t = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

7 Exercice type - Lemme de Riemann-Lebesque

Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$. Étudier le comportement asymptotique de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t$ pour $n \to +\infty$.

Corrigé : Soit n entier non nul. En intégrant par partie, on a

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{f(t)\mathrm{e}^{int}}{in}\right]_a^b - \frac{1}{in}\int_a^b f'(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t$$

D'où
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\left[|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right]$$

Ainsi
$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

8 Exercice type

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Si $\mathrm{Re}\,(\alpha) > 0$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{\alpha}$.

Corrigé : Pour $x \geqslant 0$, on a $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\left[1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}\right]$ et $|\mathrm{e}^{-\alpha x}| = \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\,(\alpha)x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Le résultat suit.

9 Questions de cours

Intégrales généralisées, graphes usuels.