ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026 11/09/2025

Devoir en temps libre n°1

Problème I

On pose $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(nt) + \sqrt{2}}$$

Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n \geqslant 1}$ est constante.

Problème II

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que l'intégrale définissant I_n pour n entier est bien convergente.
2. Montrer $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{S}_n = \mathrm{I}_n$$
3. En déduire que la suite $(\mathrm{I}_n)_n$ converge et préciser sa limite.

Problème III

On note $$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \left[\mathrm{Arctan}\,(t+1) - \mathrm{Arctan}\,(t)\right]\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer la convergence de l'intégrale définissant I.
2. Déterminer une primitive de Arctan.
3. Calculer la valeur de I.

Problème IV

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{J}_n = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer la convergence de $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
2. Justifier que I_n et J_n sont bien définies pour tout n entier.
3. Pour n entier, calculer $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n$ puis en déduire la valeur de I_n pour tout n entier.
4. Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;\pi\,],\mathbb{R})$. Montrer que $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f(t)\sin\left((n+\tfrac{1}{2})t\right)\,\mathrm{d}t = 0$$
5. On pose $f(t) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \dfrac{2}{t}$ pour $t \in \,]\,0\,;\pi\,]$ et $f(0) = 0$. Montrer que $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;\pi\,],\mathbb{R})$.
6. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.