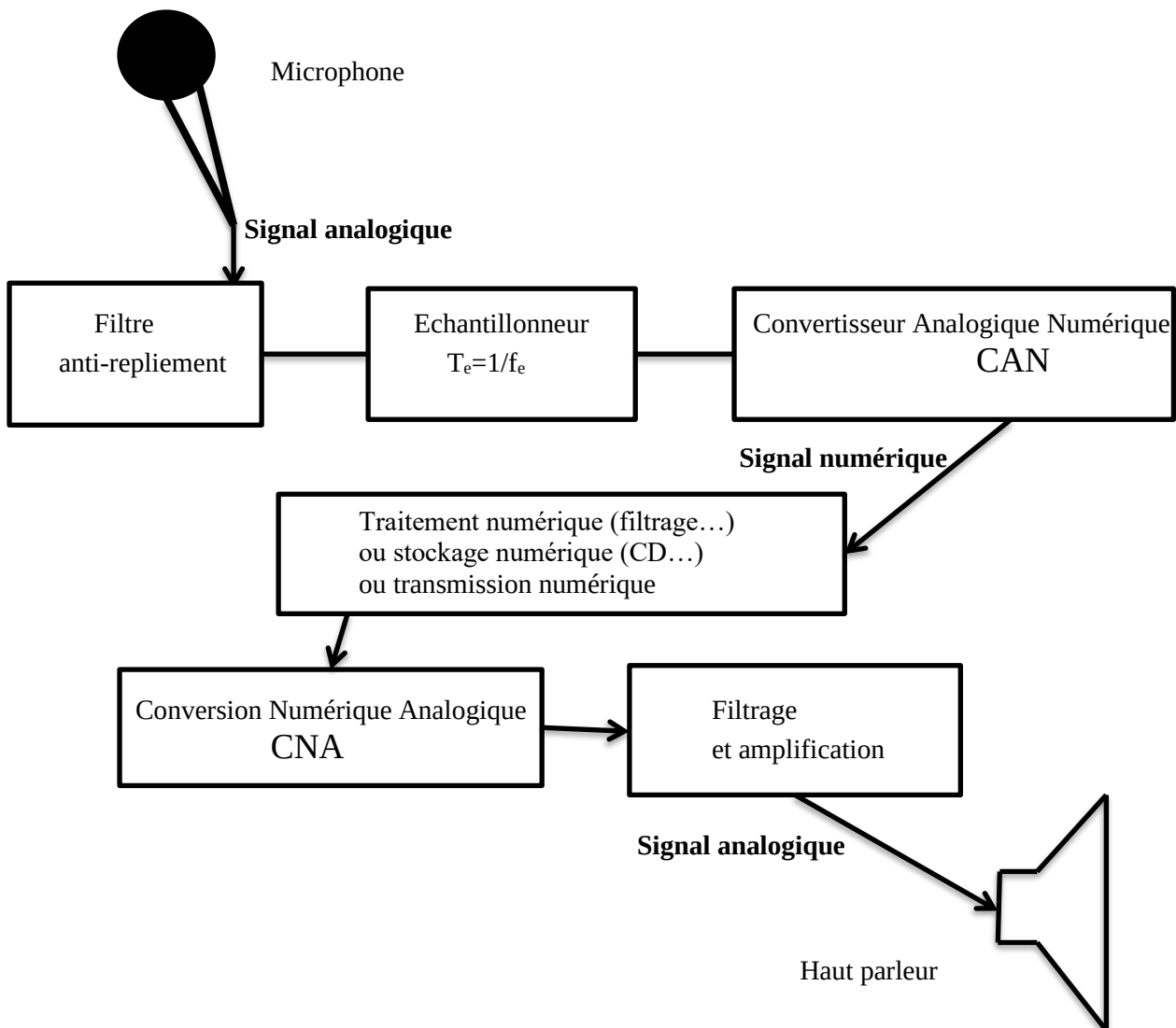


Ch TS3 : Echantillonnage et filtrage numérique

Poly à trous

I. Chaîne de traitement numérique du signal

1) Exemple : chaîne de traitement numérique du son



2) Etapes

- **Un signal analogique $X(t)$ est un signal qui varie continument en fonction du temps.**
 $X(t)$ est un signal à temps et à valeurs

Echantillonnage : il consiste à prendre de façon périodique des valeurs sur ce signal appelées

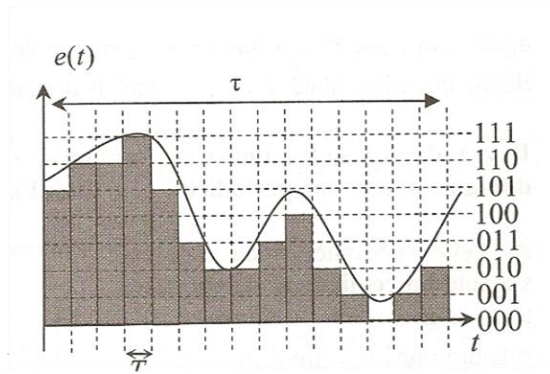
T_e est appelée période d'échantillonnage, c'est la durée entre deux échantillons.

$f_e = 1/T_e$ est la fréquence d'échantillonnage, c'est le nombre d'échantillons par seconde.

On obtient un **signal échantillonné** $X_e(t)$ à temps discret (car il n'est connu qu'à des temps multiples de la période d'échantillonnage).

- **Numérisation** par un convertisseur analogique-numérique (CAN).
Un signal numérique $X(n)$ est un signal à temps et à valeurs son amplitude évolue par paliers. (car
 Le signal est donc quantifié puis codé en binaire.

Un convertisseur p bits peut donc produire 2^p niveaux de quantification différents.
Exemple d'un CAN 3 bits :

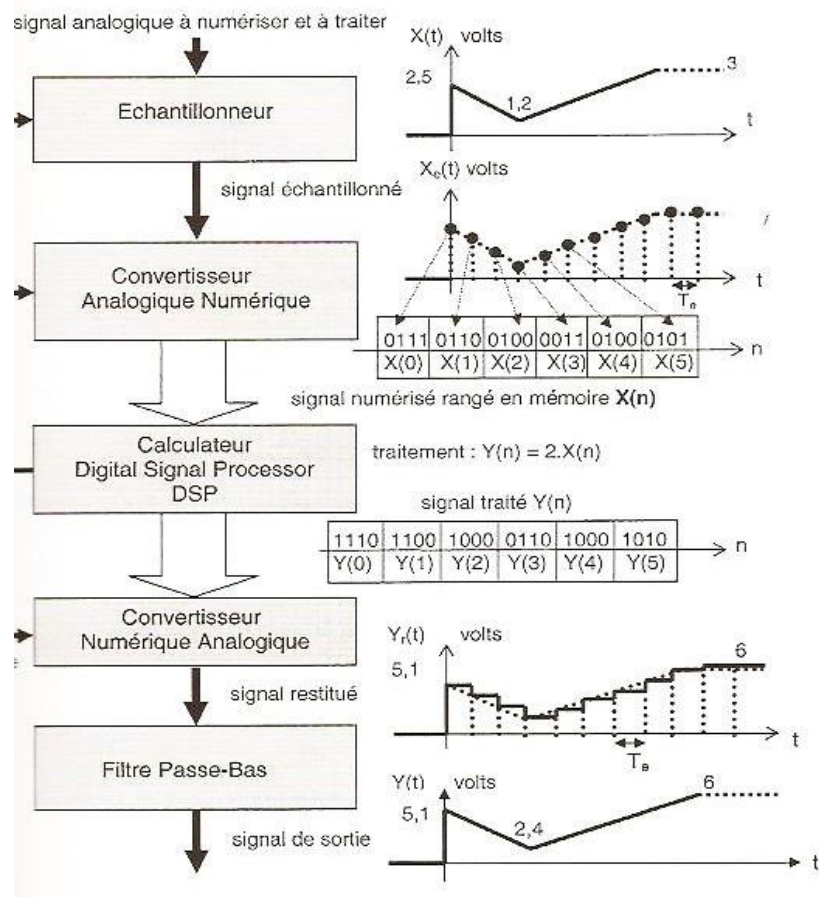


On observe $2^3=8$ niveaux de quantification

- **Traitement numérique** sur le signal $X(n)$: filtrage numérique, l'écho et la réverbération pour un signal sonore... On obtient un nouveau signal numérique $Y(n)$.
- **Conversion numérique-analogique (CNA)**. On obtient un signal $Y_r(t)$ qui se présente comme une succession de « marches » de durée T_e dont l'amplitude est proportionnelle à $Y(n)$.
- **Lissage (filtrage passe-bas)** : Pour parfaire la forme du signal, on procède à un filtrage analogique passe-bas qui supprime la forme en marches d'escalier. On obtient un signal plus lisse $Y(t)$.

3) Chaîne complète

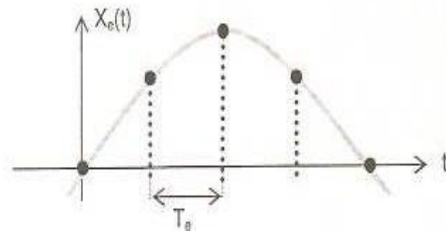
Exemple du traitement
 $Y(t)=2*X(t)$:



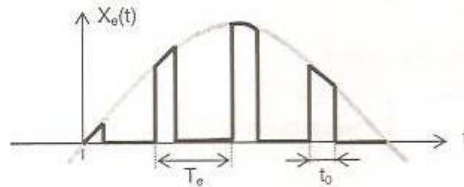
II. Echantillonnage

1) Echantillonnage idéal

Il consiste à prendre des valeurs à des instants précis :



En pratique, les échantillons ont une certaine durée t_0 :

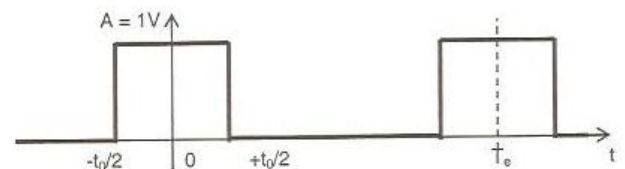


2) Spectre du signal échantillonné

Le signal échantillonné est obtenu en multipliant le signal d'entrée $X(t)$ par un signal de commande $K(t)$.

Rem : Signal de commande réel :

Ce sont des impulsions de durée t_0 espacées de T_e :



Sa décomposition en séries de Fourier est : $K(t) = K_0 + \sum_{m=1}^{\infty} K_m \cos(2\pi m F_e t)$

Avec $K_m = 2 \frac{A t_0}{T_e} \frac{\sin(\pi m F_e t_0)}{m \pi F_e t_0}$

Cas d'un signal de commande idéal :

C'est le cas idéal où $t_0 \ll T_e$.

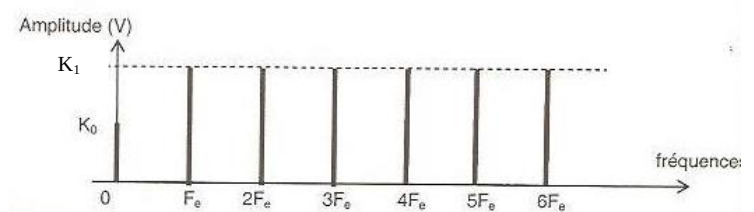
Le signal de commande est un peigne de Dirac.

Alors $K_m = 2 \frac{A t_0}{T_e} \frac{\sin(\pi m F_e t_0)}{m \pi F_e t_0} \approx 2 \frac{A t_0}{T_e} \approx cte$

est indépendant de m .

$$K(t) = K_0 + K_1 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi m F_e t)$$

Le spectre est formé de raies de même amplitude :



Signal échantillonné :

* C'est le produit du signal d'entrée analogique $X(t)$ par le signal de commande $K(t)$:

$$X_e(t) =$$

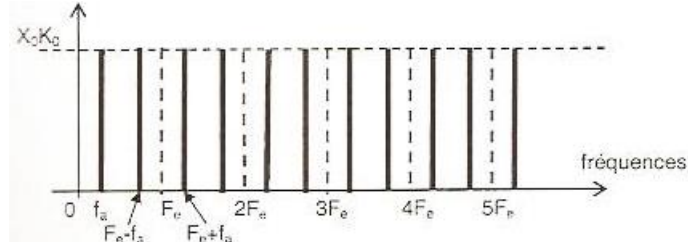
* Si le signal d'entrée est un signal sinusoïdal de fréquence f_a : $X(t) = A \cdot \cos(2\pi f_a t)$:

$K(t)$ est décomposable en série de Fourier $K(t) = K_0 + \sum_{m=1}^{\infty} K_m \cos(2\pi m F_e t)$

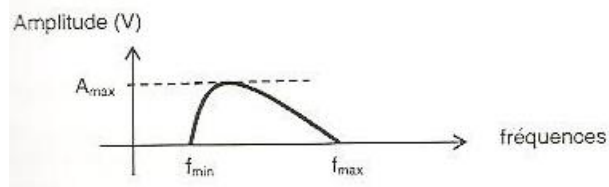
Donc $X_e(t) = A \cos(2\pi f_a t) [K_0 + \sum_{m=1}^{\infty} K_m \cos(2\pi m F_e t)]$

or $\cos(2\pi f_a t) \cos(2\pi m F_e t) = \frac{1}{2} [\cos(2\pi (f_a + m F_e) t) + \cos(2\pi (m F_e - f_a) t)]$

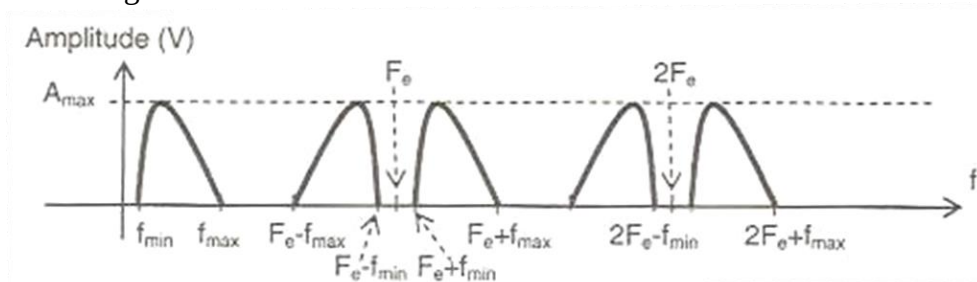
Donc le spectre de $X_e(t)$ fait apparaître les fréquences



* Si le signal d'entrée est un signal sonore de spectre continu :



Le spectre de ce signal échantillonné est :

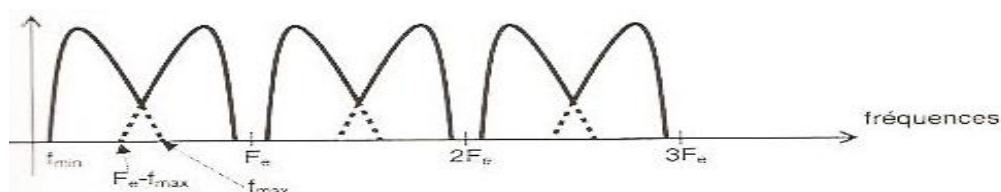


CE : Commenter la structure du spectre du signal obtenu après échantillonnage.

Lors de la conversion numérique-analogique, pour restituer uniquement le spectre du signal de sortie, il faudra supprimer toutes les fréquences supérieures à $f_{\max}$ (ou $F_e/2$ si F_e est bien choisie) à l'aide d'un filtre passe-bas appelé filtre de restitution (c'est le filtre de lissage).

3) Condition de Nyquist-Shannon

Si on diminue la fréquence d'échantillonnage F_e , $F_e - f_{\max}$ va se rapprocher de $f_{\max}$. Il peut même y avoir un recouvrement, c'est le phénomène de **repliement de spectre** :



Alors aucun filtrage passe-bas ne permettra de retrouver le signal d'origine.

Donc pour que l'échantillonnage ne déforme pas le signal il faut vérifier la condition
ou $F_e >$

Cela correspond **au minimum** à

C'est la **condition de Nyquist-Shannon** :

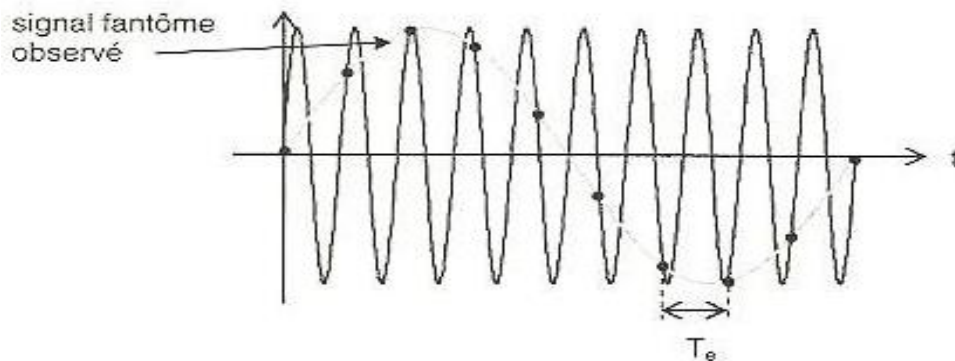
Lorsqu'on échantillonne un signal analogique de fréquence maximale $f_{\max}$, il faut prendre au moins échantillons par seconde : $F_e >$

CE : Choisir la fréquence d'échantillonnage afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon.

Le repliement de spectre, dû au non-respect du critère de Shannon, se traduit par une perte d'information sur le signal d'origine.

Conséquence d'un sous-échantillonnage (non-respect de ce critère de Shannon) :

Le calculateur voit un signal fantôme qui n'a pas la même fréquence que le signal d'entrée, c'est ce qu'on appelle un phénomène de stroboscopie :



Illustrations visuelles de l'effet stroboscopique en cours.

Filtre anti-repliement : Pour éviter le recouvrement de spectre il faut respecter la condition de Nyquist-Shannon mais on peut aussi rajouter systématiquement à l'entrée du convertisseur un **filtre anti-repliement** qui va limiter la fréquence du signal d'entrée à

4) Choix des paramètres d'une acquisition numérique

Il y a 2 paramètres à choisir : la période d'échantillonnage T_e et la durée d'acquisition τ . On en déduit le nombre de points d'acquisition $N = \tau / T_e$.

- T_e doit **respecter la condition de Shannon** : $F_e > 2.f_{\max}$ donc on a intérêt à prendre la fréquence d'échantillonnage F_e la plus
- La durée d'acquisition τ doit être la plus : toute la durée du concert si on veut enregistrer un concert, de plus lors d'une analyse spectrale **la résolution du spectre est de $1/\tau$** (écart minimal entre 2 fréquences du spectre calculé).
- Les 2 critères précédents tendent à augmenter le nombre de points d'acquisition $N = \tau / T_e$ mais on est **limité par les capacités de stockage ou le débit de la transmission**. Il faut donc trouver un compromis.

III. Filtrage numérique

CE expérimentale : Mettre en œuvre un convertisseur analogique-numérique et un traitement numérique afin de réaliser un filtre passe-bas ; utiliser un convertisseur numérique-analogique pour restituer un signal analogique.

CE numérique : A l'aide d'un langage de programmation, simuler un filtrage numérique et visualiser son action sur un signal périodique.

1) Filtre passe-bas du premier ordre : passage de l'équation différentielle à l'équation aux différences (ou équation de récurrence)

Un filtre passe-bas analogique d'ordre 1 est un filtre de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\omega / \omega_c}$

donc qui est régi par l'équation différentielle : $\frac{1}{\omega_c} \frac{ds}{dt} + s = e$

où ω_c est sa pulsation de coupure.

Méthode d'Euler (ou méthode des différences finies) :

On écrit la formule de Taylor à l'ordre 1 : $s(t) = s(t - T_e) + T_e \frac{ds}{dt} + o(T_e)$

Pour T_e faible on en déduit une approximation de la dérivée : $\frac{ds}{dt} \approx \frac{s(t) - s(t - T_e)}{T_e}$

Avec $t = n.T_e$, on passe aux signaux numériques : $s(n.T_e) = s[n]$

D'où l'approximation de la dérivée : $\frac{ds}{dt} \approx \frac{s[n] - s[n-1]}{T_e}$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\frac{s[n] - s[n-1]}{\omega_c T_e} + s[n] = e[n]$$

Un filtre numérique passe-bas d'ordre 1 est régi par **l'équation aux différences** (ou équation de récurrence):

$$s[n] = b_0 e[n] - a_1 s[n-1] \quad \text{avec}$$

$$a_1 =$$

$$\text{et } b_0 =$$

C'est la méthode qui sera mise en œuvre en TP (TP « Filtrage numérique »). L'algorithme du filtre passe-bas sera programmé avec le langage Python.

Pour s'entraîner : chercher l'équation aux différences d'un filtre passe-haut du premier ordre.

2) Deuxième méthode : moyenne glissante

Pour réaliser un filtrage passe-bas, on peut aussi additionner un nombre n d'échantillons successifs et diviser par n , ce qui réalise une « moyenne glissante » donc un filtrage passe-bas. Par exemple :

$$s[n] =$$

Cette deuxième méthode sera aussi mise en œuvre dans le TP « Filtrage numérique ».

3) Filtre d'ordre 2

Discrétisation de la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} \text{Par la formule de Taylor,} \quad s(t) &= s(t - T_e) + & + o(T_e^2) \\ s(t - 2T_e) &= s(t - T_e) - & + o(T_e^2) \end{aligned}$$

$$\text{Si on somme ces formules, } s(t) + s(t - 2T_e) =$$

On en déduit une approximation de la dérivée seconde pour T_e faible : $\frac{d^2s}{dt^2} \approx$

$$\text{D'où la discrétisation de la dérivée seconde : } \frac{d^2s}{dt^2} \approx \frac{s[n] + s[n-2] - 2s[n-1]}{T_e^2}$$

Equation aux différences d'un filtre passe-bas d'ordre 2 :

$$\text{Fonction de transfert réduite } \underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Equation différentielle :

On utilise la discrétisation des dérivées premières et secondes :

D'où l'équation aux différences :

$$s[n] =$$