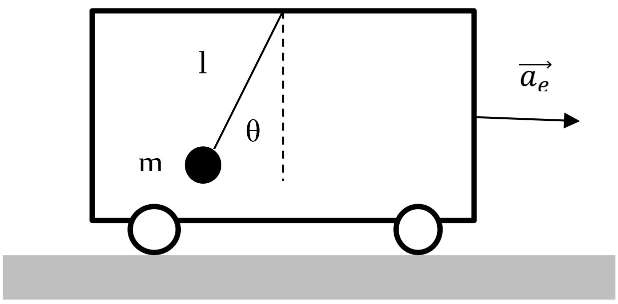
TD - M1 - Référentiels non galiléens

Exercice 1* : Déplacements sur un manège

Un manège d'enfant comporte une plate-forme en forme de disque de centre O et de rayon R, tournant à une vitesse angulaire constante $\omega > 0$ autour de l'axe vertical ascendant (Oz). Le propriétaire, assimilé à un point matériel M, parcourt la plate-forme pour ramasser les tickets. Soit R(O,x,y,z) un référentiel lié au sol et $R_1(O, x_1,y_1,z_1)$ un référentiel lié à la plate-forme.
Dans tout cet exercice, les vecteurs seront exprimés par leurs composantes dans la base $(\overrightarrow{u_{x_1}}, \overrightarrow{u_{y_1}}, \overrightarrow{u_{z_1}})$.

1) Le propriétaire part du centre O du manège à t=0 et suit le rayon (Ox_1) avec un mouvement uniforme de vitesse de norme v_1. Déterminer la position de M dans R_1 $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$, puis les vitesses et accélération de M dans le référentiel lié au sol R.
2) Le propriétaire parcourt maintenant sur la plate-forme un cercle de rayon a_0, de centre O, avec une vitesse angulaire constante ω'. A t = 0, M est sur l'axe (Ox_1).
   Déterminer la position de M dans R_1 $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$, puis les vitesses et accélération de M dans le référentiel lié au sol R.
   Vérification : Prédire ce que l'on devrait observer si $\omega' = -\omega$ et le vérifier dans vos expressions.

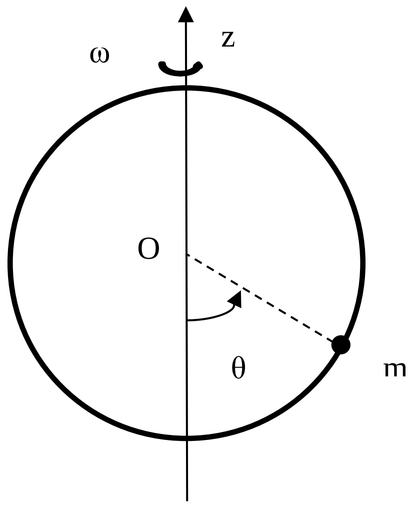
Exercice 2**♥ : Objet suspendu dans un véhicule



Un véhicule a une accélération horizontale $a_e = 1$ m.s^{-2} par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. Un pendule simple de longueur l et de masse m est suspendu au toit du véhicule.

1) Quelle est l'équation du mouvement du pendule ?
2) Quelle est l'inclinaison θ_e du pendule à l'équilibre ?
3) Exprimer la période des petites oscillations autour de θ_e.

Exercice 3**♥ : Perle dans un cerceau en rotation



Un cerceau de rayon R tourne autour d'un diamètre vertical (Oz) à la vitesse angulaire ω constante. Une perle, assimilé à une masse ponctuelle m, est enfilée sur ce cerceau et peut coulisser sans frottement.

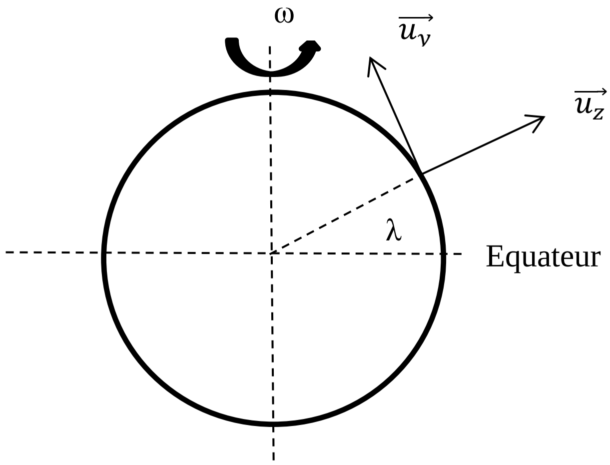
1) Ecrire la relation fondamentale de la dynamique pour la perle dans le référentiel R' lié au cerceau.
2) En déduire les positions d'équilibre dans R'.
3) Etudier leur stabilité en s'intéressant à de petits mouvements autour d'une position d'équilibre.
4) Retrouver les résultats précédents par une étude énergétique.

Exercice 4* : Force de Coriolis sur un train

Un train à grande vitesse de masse m = 7,8.10^5 kg, circule du nord vers le sud entre Lyon et Avignon à la vitesse constante v = 300km.h^{-1}. A l'instant considéré il se trouve à la hauteur de Valence à la latitude λ = 45° nord. Au point P où se situe le train, on définit une base orthonormée directe avec $\overrightarrow{u_x}$ vers l'est, $\overrightarrow{u_y}$ vers le nord et $\overrightarrow{u_z}$ vers le haut.

1) Faire un schéma où apparaissent la Terre en coupe, la base ci-dessus au point P, le vecteur vitesse du train et le vecteur rotation de la Terre $\vec{\Omega}$.
2) Déterminer la force de Coriolis qui s'exerce sur le train dans le référentiel terrestre et comparer sa norme à celle du poids du train.
3) Faire un schéma en coupe du train vu de l'arrière et représenter les différentes forces subies. Lequel des deux rails s'use le plus ? Qu'est-ce qui change quand le train va vers le nord ?

Exercice 5***♥ : Déviation vers l'est



Un point matériel de masse m est lâché sans vitesse initiale d'une altitude h depuis un lieu de latitude λ. Le vecteur $\overrightarrow{u_x}$ pointe vers l'est, $\overrightarrow{u_y}$ vers le nord et $\overrightarrow{u_z}$ vers le haut. Le poids est suivant -$\overrightarrow{u_z}$.

1) Faire un bilan des forces exercées sur le mobile dans le référentiel terrestre (ne pas oublier la force de Coriolis).
2) Ecrire le principe fondamental de la dynamique et le projeter sur les trois vecteurs de base.

On cherche à résoudre ce système de manière perturbative.

3) Selon quelle direction la vitesse est-elle non nulle en l'absence de rotation terrestre ? Intégrer deux fois l'équation obtenue dans le cadre de cette approximation.
4) On s'intéresse aux accélérations projetées sur les deux autres directions. Expliquer pourquoi l'une de ces projections est nettement supérieure à l'autre.
5) Calculer alors cette accélération puis la vitesse associée en utilisant les résultats du 3).
6) En déduire qu'au moment de toucher le sol la masse a légèrement dévié vers l'est.
7) Faire l'application numérique pour h=158m, λ=50° et g=9,8m.s^{-2}.
8) Ferdinand Reich a mesuré en 1833, à la latitude λ=50°, pour une masse tombant dans un puit de profondeur h=158m, une déviation vers l'est de 28mm. Qu'en pensez-vous ?

Réponses :

Ex 1 : 1) $x_1 = v_1 t$, $y_1=0=z_1$, $\overrightarrow{v_{/R}}(M) = V_1\overrightarrow{u_{x1}} + \omega V_1 t\overrightarrow{u_{y1}}$ $\quad \overrightarrow{a_{/R}}(M) = -\omega^2 V_1\overrightarrow{u_{x1}} + 2\omega V_1\overrightarrow{u_{y1}}$

2) $x_1 = a_0\cos(\omega' t)$, $y_1=a_0\sin(\omega' t)$, $z_1=0$, $\overrightarrow{v_{/R}}(M) = (\omega+\omega')a_0[-\sin(\omega' t)\overrightarrow{u_{x1}} + \cos(\omega' t)\overrightarrow{u_{y1}}]$

$\overrightarrow{a_{/R}}(M) = -(\omega+\omega')^2 a_0[\cos(\omega' t)\overrightarrow{u_{x1}} + \sin(\omega' t)\overrightarrow{u_{y1}}]$

Ex 2 : 1) $l\ddot{\theta} = -g\sin(\theta) + a_e\cos(\theta)$

2) $\tan(\theta_e)=a_e/g$ $\quad$ 3) $T = 2\pi\sqrt{l/\sqrt{g^2+a_e^2}}$

Ex 3 : 2) Positions d'équilibre : $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = \mp\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$ si $\omega > \sqrt{g/R}$

3) Equation des petits mouvements autour de $\theta = 0$: $\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{g}{R} + \omega^2\right)\varepsilon = 0$

Position stable si $\omega < \sqrt{g/R}$

Equation des petits mouvements autour de $\theta = \pi$: $\ddot{\varepsilon} - \left(\frac{g}{R} + \omega^2\right)\varepsilon = 0$

Position instable

Equation des petits mouvements autour de $\theta = \mp\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$: $\ddot{\varepsilon} + \left(-\frac{g}{R} + \omega^2\right)\varepsilon = 0$

Position stable si $\omega > \sqrt{g/R}$

4) $Ep_{totale} = -\frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2(\theta) - mgR\cos(\theta) + cte$ ...

Ex 4 : 2) $\overrightarrow{F_C} = -2m\omega v\sin(\lambda)\overrightarrow{u_x}$ $\quad F_c/mg = 9.10^{-4}$

3) Le rail de droite s'use le plus vite

Ex 5 : 2) $\ddot{x} = 2\omega(\dot{y}\sin(\lambda) - \dot{z}\cos(\lambda))$ $\quad \ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin(\lambda)$ $\quad \ddot{z} = -g + 2\omega\dot{x}\cos(\lambda)$

3) Si ω=0, $z = h - gt^2/2$

6) Déviation vers l'est $\Delta x = \frac{2}{3}h\omega\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos(\lambda)$

7) Δx =2,8cm