

Programme de colles

 Venir avec un cahier de colles : y coller les énoncés des exercices et les reprendre à l'issue de la colle.

Semaine 1 15/09/25 - 19/09/25

Programme :

Intégrales généralisées :

- Définition sur un intervalle semi-ouvert, relation de Chasles sur un intervalle semi-ouvert, définition sur un intervalle ouvert, linéarité sous réserve de convergence, intégrale faussement impropre, intégrale fonction de la borne supérieure ou inférieure ;
- Intégrales de Riemann ;
- Comparaison pour des fonctions positives, relations de comparaison o , O et $\sim$ pour des fonctions positives ;
- Intégrabilité, l'intégrabilité implique la convergence de l'intégrale, structure de $\mathbb{K}$ -ev et linéarité de l'intégrale pour les fonction intégrables, positivité, croissance, relation de Chasles, inégalité triangulaire, séparation ;
- Relations de comparaison o , O et $\sim$ avec une fonction de référence intégrable ;
- Intégration des relations de comparaison avec une fonction de référence positive : cas où celle-ci est intégrable, cas où celle-ci n'est pas intégrable ;
- Théorèmes de changement de variables, intégrales de type Riemann sur $[a; b[$ ou $]a; b]$, intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un intervalle ouvert centré en zéro, théorème d'intégration par parties.

Questions de cours : (avec preuve)

1. Nature et éventuellement valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ avec α réel ;
2. Intégrales de Riemann ;
3. Théorème de comparaison pour $0 \leq f \leq g$ et ses corollaires immédiats (dont le critère des équivalents) ;
4. L'intégrabilité implique la convergence de l'intégrale (avec la proposition clé) ;
5. Intégration des relations de comparaison (cas intégrable, cas non intégrable) ;
6. Théorèmes de changement de variables (cas strictement croissant et décroissant) ;
7. Intégrales de type Riemann sur $[a; b[$ ou $]a; b]$;
8. Théorème d'intégration par parties ;
9. Convergence de l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ (deux méthodes) ;
10. Convergence de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et égalité à $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2} dt$;
11. Divergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$.