Corrigé du devoir en temps libre n°1

Problème I

Soit n entier non nul. Posant $u = nt$ puis utilisant la relation de Chasles et enfin avec $v = u - 2k\pi$, il vient

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\cos(u)+\sqrt{2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\cos(u)+\sqrt{2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}v}{\cos(v+2k\pi)+\sqrt{2}}$$

La fonction cos étant 2π-périodique, il vient

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}v}{\cos(v)+\sqrt{2}} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}v}{\cos(v)+\sqrt{2}}$$

Ainsi $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_1}$$

Problème II

1. On a $t \mapsto \dfrac{t^n - t^{2n}}{1-t} \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;1\,[\,,\mathbb{R})$, prolongeable par continuité en 1 avec

$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad \frac{t^n - t^{2n}}{1-t} = \sum_{k=n}^{2n-1} t^k \xrightarrow[t\to 1]{} n$$

$$\boxed{\text{L'intégrale définissant } \mathrm{I}_n \text{ pour } n \text{ entier est bien convergente.}}$$

2. Avec la factorisation précédemment obtenue, il vient pour n entier par linéarité de l'intégrale (sur un segment cette fois)

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \sum_{k=n}^{2n-1} t^k \,\mathrm{d}t = \sum_{k=n}^{2n-1}\int_0^1 t^k \,\mathrm{d}t = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+1}$$

Ainsi $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{S}_n = \mathrm{I}_n}$$

3. Soit n entier. Un changement d'indice donne

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n}$$

On reconnaît la somme de Riemann associée à la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ continue sur $[\,0\,;1\,]$. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(2).}$$

Problème III

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, t \mapsto \operatorname{Arctan}(t+1) - \operatorname{Arctan}(t)$. On a $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall t \geqslant 0 \qquad |f(t)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{u \in]\,t\,;t+1\,[} \frac{1}{1+u^2}\,|t+1-t| = \frac{1}{1+t^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est intégrable sur } [\,0\,;+\infty\,[.}$$

Variante : D'après la relation fondamentale $\operatorname{Arctan}(u) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}$ pour $u > 0$, il vient

$$\forall t > 0 \qquad f(t) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t+1}\right)$$

Avec le développement usuel en zéro $\operatorname{Arctan}(u) = u + \mathrm{O}(u^2)$, on obtient

$$\forall t > 0 \qquad f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

2. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \operatorname{Arctan}(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient

$$\int \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t = [t\operatorname{Arctan}(t)] - \int \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

D'où
$$\boxed{\int \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t = t\operatorname{Arctan}(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}}$$

3. Soit $x \geqslant 0$. En utilisant le résultat précédent, il vient

$$\begin{aligned}
&\int_0^x [\operatorname{Arctan}(t+1) - \operatorname{Arctan}(t)]\,\mathrm{d}t \\
&\qquad = \left[(t+1)\operatorname{Arctan}(t+1) - \frac{1}{2}\ln(1+(t+1)^2) - t\operatorname{Arctan}(t) + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^x \\
&\qquad = x\,(\operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan}(x)) + \operatorname{Arctan}(x+1) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+(x+1)^2}{1+x^2}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}
\end{aligned}$$

On a
$$\frac{1+(x+1)^2}{1+x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \quad \text{d'où} \quad \ln\left(\frac{1+(x+1)^2}{1+x^2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et
$$\operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Ainsi
$$\int_0^x [\operatorname{Arctan}(t+1) - \operatorname{Arctan}(t)]\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\pi + 2\ln(2)}{4} + \mathrm{o}(1)$$

On conclut
$$\boxed{\int_0^{+\infty} [\operatorname{Arctan}(t+1) - \operatorname{Arctan}(t)]\,\mathrm{d}t = \frac{\pi + 2\ln(2)}{4}.}$$

Remarque : Une autre approche plus expéditive est possible. Pour $x \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^x [\operatorname{Arctan}(t+1) - \operatorname{Arctan}(t)]\,\mathrm{d}t &= \int_1^{x+1} \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_x^{x+1} \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

La croissance de Arctan permet d'encadrer l'intégrale sur $[\,x\,;x+1\,]$ et on conclut.

Problème IV

1. On choisit une primitive de sin qui s'annule en 0, à savoir $t \mapsto 1-\cos(t)$. Les fonctions $t \mapsto 1-\cos(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. On a

$$\frac{1-\cos(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos(t)}{t} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, le crochet $\left[\dfrac{1-\cos(t)}{t}\right]$ admet des limites finies en 0 et $+\infty$. D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} -\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. L'intégrande de cette dernière intégrale est continu par morceaux sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et on a

$$-\frac{1-\cos(t)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui prouve la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} -\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et par conséquent

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ et $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ sont continues respectivement sur $]\,0\,;\pi\,]$ et $]\,0\,;\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\,]$. Au voisinage de zéro, avec l'équivalent usuel $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$, on trouve

$$\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{(n+\frac{1}{2})t}{\frac{t}{2}} \xrightarrow[t\to 0]{} 2(n+\tfrac{1}{2}) \quad \text{et} \quad \frac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$

Ainsi, les deux intégrandes sont prolongeables par continuité en zéro donc les intégrables définissant I_n et J_n sont faussement impropres d'où

$$\boxed{\text{Les intégrales définissant } \mathrm{I}_n \text{ et } \mathrm{J}_n \text{ sont bien définies pour tout } n \text{ entier.}}$$

3. Par trigonométrie, on a

$$\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2 \qquad \sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Par linéarité car convergence, on trouve pour n entier

$$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^{\pi} \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\left[\sin\left((n+\tfrac{3}{2})t\right) - \sin\left((n+\tfrac{1}{2})t\right)\right]\,\mathrm{d}t$$

Avec le résultat de la question précédente, on obtient

$$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^{\pi} \frac{1}{\sin\frac{t}{2}} 2\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\cos((n+1)t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} \cos((n+1)t)\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{\sin((n+1)t)}{n+1}\right]_0^{\pi}$$

Autrement dit $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = 0}$

Ainsi, la suite $(\mathrm{I}_n)_n$ est constante et on a

$$\mathrm{I}_0 = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \mathrm{d}t = \pi$$

On conclut $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \pi}$

4. En intégrant par parties, on trouve

$$\int_0^\pi f(t)\sin\left((n+\tfrac{1}{2})t\right)\,\mathrm{d}t = \left[f(t)\frac{-\cos\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{n+\frac{1}{2}}\right]_0^\pi + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi f'(t)\cos\left((n+\tfrac{1}{2})t\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{f(0)}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi f'(t)\cos\left((n+\tfrac{1}{2})t\right)\,\mathrm{d}t$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left|\int_0^\pi f'(t)\cos\left((n+\tfrac{1}{2})t\right)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi |f'(t)|\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}(1)$$

Ainsi, faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(t)\sin\left((n+\tfrac{1}{2})t\right)\,\mathrm{d}t = 0}$$

5. On a $$\forall t \in \left]0\,;\pi\right] \qquad f(t) = \frac{t-2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0\,;\pi\right]$ comme quotient de fonctions $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Avec un développement de sin à l'ordre 2, on trouve

$$\forall t \in \left]0\,;\pi\right] \qquad f(t) = \frac{t-t+\mathrm{o}(t^2)}{t\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{t\to0}{\sim} \frac{\mathrm{o}(t^2)}{\frac{t^2}{2}} \xrightarrow[t\to0]{} 0 = f(0)$$

Ainsi, on a $f \in \mathscr{C}^1(\left]0\,;\pi\right],\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}(\left[0\,;\pi\right],\mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall t \in \left]0\,;\pi\right] \qquad f'(t) = \frac{4-4\cos\left(\frac{t}{2}\right)^2 - t^2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2t^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

On a $$2t^2\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)^2 \underset{t\to0}{\sim} 2t^2\times\frac{t^2}{4} \underset{t\to0}{\sim} \frac{t^4}{2}$$

Avec un développement de cos aux ordres 4 et 2 respectivement, on trouve

$$4-4\cos\left(\tfrac{t}{2}\right)^2 - t^2\cos\left(\tfrac{t}{2}\right) = 4-4\left(1-\frac{t^2}{4}++\frac{t^4}{4!2^4}\right) - t^2\left(1-\frac{t^2}{4}\right) + \mathrm{o}(t^4) = \frac{1}{24}t^4 + \mathrm{o}(t^4)$$

Par suite $$f'(t) \underset{t\to0}{\sim} \frac{\frac{t^4}{24}}{\frac{t^4}{2}} \xrightarrow[t\to0]{} \frac{1}{12}$$

D'après le théorème de limite de la dérivée, on a f dérivable en 0 et f' continue en 0 d'où

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \left[0\,;\pi\right].}$$

6. On applique le résultat de la question 5 avec la fonction f introduite à la question 6 et on trouve par linéarité de l'intégrale car convergence

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(t)\sin\left((n+\tfrac{1}{2})t\right)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\left(\mathrm{I}_n - 2\int_0^\pi \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{t}\,\mathrm{d}t\right) = 0$$

Or on sait que $\mathrm{I}_n = \pi$ pour tout n entier et en posant $u = (n+\frac{1}{2})t$, il vient

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{J}_n$$

On conclut $$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\mathrm{J}_n = \frac{\pi}{2}}$$