Devoir en temps libre n°2

Problème I

Pour $x \in]-1; 1[$, on pose
$$F(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos t + x^2) dt$$

1. Justifier que $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in]-1; 1[$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1; 1 [$.
3. Déterminer une expression simple de $F'(x)$ pour $x \in] -1; 1 [$ à l'aide du changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.
4. Justifier que $F(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
5. Étendre la détermination de F à $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Problème II

On pose
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} du \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$$

1. Montrer que $\psi : u \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie.
3. Montrer que $F \in \mathcal{C}^1(]0; +\infty[, \mathbb{R})$ puis exprimer $F'(x)$ sous forme intégrale.
4. En déduire

$$\forall x > 0 \quad xF'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x) = -K$$

5. Pour $x > 0$, on pose $G(x) = \sqrt{x}e^{-x}F(x)$. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que

$$\forall x > 0 \quad G(x) = C - K \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

6. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} G(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$. En déduire la valeur de K .