Feuille d'exercices n°06

Exercice 1 (****)

On pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2} dt$

1. Montrer que F est définie, continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Étudier la dérivabilité de F en zéro.

Corrigé : 1. On pose $\forall(x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \frac{\sin(xt)}{1+t^2}$

avec $X = \mathbb{R}$ et $I =]0; +\infty[$. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On a

$$\forall(x, t) \in X \times I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

On a $\varphi \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$ et intégrable sur I puisque $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = [\text{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi

La fonction F est bien définie, continue sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux et par dérivation

$$\forall(x, t) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+ \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{t \cos(xt)}{1+t^2}$$

Il semble alors compromis d'établir une domination intégrable. Transformons l'intégrale d'origine. Soit $X' =]0; +\infty[$. Pour $x \in X'$, avec le changement de variables $u = xt$, on obtient l'égalité (la convergence étant assurée)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2} dt = xG(x) \quad \text{avec} \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{x^2 + u^2} du$$

On pose $\forall(x, t) \in X' \times I \quad g(x, t) = \frac{\sin(t)}{x^2 + t^2}$

Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale.

- Pour $x > 0$, on a $t \mapsto g(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ et $g(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'où son intégrabilité sur I.
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto g(x, t) \in \mathcal{C}^1(X', \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall(x, t) \in X' \times I \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{2x \sin(t)}{(x^2 + t^2)^2}$$

- Pour $x > 0$, on a $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On procède localement. Soit $[a; b] \subset X'$. On a

$$\forall(x, t) \in [a; b] \times I \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t) \quad \text{avec} \quad \psi(t) = \frac{2b}{(a^2 + t^2)^2}$$

On a $\psi \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$ et $\psi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'où son intégrabilité sur I . Ainsi, la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de X' donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur X' et par parité de G , il s'ensuit que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ d'où

$$\boxed{F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})}$$

3. Soit $x \neq 0$. D'après ce qui précède, on a

$$\frac{F(x)}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2 + x^2} du = H(x) + K(x)$$

avec
$$H(x) = \int_0^1 \frac{\sin(u)}{u^2 + x^2} du \quad \text{et} \quad K(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2 + x^2} du$$

Sans difficultés, on a K définie continue en 0. La fonction H décroît sur $]0; +\infty[$ donc admet une limite en 0^+ (de même en 0^- par parité). Soit $\varepsilon \in]0; \pi[$. Par positivité de l'intégrande, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad H(x) \geq \int_\varepsilon^\pi \frac{\sin(u)}{u^2 + x^2} du$$

Par continuité sous l'intégrale de droite ci-dessus (sans difficulté), il vient par passage à la limite

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) \geq \int_\varepsilon^\pi \frac{\sin(u)}{u^2} du$$

Or, la fonction $u \mapsto \frac{\sin(u)}{u^2}$ est positive non intégrable sur $]0; \pi[$ d'où

$$\int_\varepsilon^\pi \frac{\sin(u)}{u^2} du \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} +\infty$$

On en déduit
$$\frac{F(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

Et on conclut
$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$$

Variante : D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad |\sin(u) - u| \leq \frac{u^2}{2}$$

et il vient
$$\left| H(x) - \int_0^1 \frac{u}{u^2 + x^2} du \right| \leq \int_0^1 \frac{|\sin(u) - u|}{u^2 + x^2} du \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u^2}{u^2 + x^2} du$$

et
$$\int_0^1 \frac{u^2}{u^2 + x^2} du = 1 - x^2 \int_0^1 \frac{du}{u^2 + x^2} = 1 - x \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(1)$$

Ainsi
$$H(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left[\frac{1}{2} \ln(u^2 + x^2) \right]_0^1 + O(1) = -\ln(x) + O(1)$$

Par conséquent
$$\frac{F(x)}{x} = -\ln(x) + O(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

On retrouve le résultat précédent.

Exercice 2 (***)

Pour $x > 0$, on pose
$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t+x} dt$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer les limites de F en 0^+ et en $+\infty$.
3. Déterminer des équivalents de F en 0^+ et en $+\infty$.

Corrigé : 1. Posons $\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \frac{\cos(t)}{t+x}$

avec $X =]0; +\infty[$ et $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.

- Pour $x \in X$, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I par théorèmes généraux.
- Pour $t \in I$, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur X par théorèmes généraux.
- Domination : Une domination globale ne fonctionne pas. Soit $a > 0$. On a

$$\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{\cos(t)}{a+t}$$

et la fonction φ est intégrable sur I comme fonction continue sur un segment. D'après le théorème de continuité sous l'intégrale, on a F continue sur $[a; +\infty[$ pour tout $a > 0$ et par conséquent

La fonction F est définie, continue sur $]0; +\infty[$.

2. Sans difficulté, on trouve

$$\forall x > 0 \quad 0 \leq F(x) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{x} dt = \frac{1}{x}$$

Par encadrement

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Par étude de fonction ou inégalité des accroissements finis, on montre

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad \cos t \geq 1 - t$$

Il vient
$$\forall x > 0 \quad F(x) \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-t}{t+x} dt$$

et
$$\forall x > 0 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-t}{t+x} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x-(t+x)}{t+x} dt = (1+x) \left[\ln\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \ln(x) \right] - \frac{\pi}{2}$$

Par comparaison

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

Variante : Avec un changement de variable, on trouve

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}+x} \frac{\cos(u-x)}{u} du = \cos(x) \int_x^{\frac{\pi}{2}+x} \frac{\cos(u)}{u} du + \sin(x) \int_x^{\frac{\pi}{2}+x} \frac{\sin(u)}{u} du$$

Par limite monotone, on a $x \mapsto \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{u} du$ qui décroît donc admet une limite infinie en 0^+

sans quoi l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{u} du$ serait convergente ce qui est absurde. Les autres termes ont

tous une limite finie d'où le résultat.

3. Par monotonie et croissance de l'intégrale, on a

$$\forall x > 0 \quad \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt$$

Et par conséquent

$$\boxed{F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}}$$

Variante : On a $\forall x > 0 \quad xF(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1 + \frac{t}{x}} dt$

Par convergence dominée avec la dominante constante $t \mapsto 1$, on obtient

$$xF(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = 1$$

et on retrouve le résultat précédent.

On a exhibé un minorant explicite à $F(x)$ pour $x > 0$ dans la question précédente. On a également

$$\forall x > 0 \quad F(x) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{x+t} = \ln\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \ln(x)$$

Le majorant et le minorant sont tous deux équivalents à $-\ln(x)$ pour $x \rightarrow 0^+$ d'où la conclusion

$$\boxed{F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)}$$

Variante : On a établi

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \cos(x) \int_x^{\frac{\pi}{2}+x} \frac{\cos(u)}{u} du + \sin(x) \int_x^{\frac{\pi}{2}+x} \frac{\sin(u)}{u} du$$

On peut couper la première intégrale en $\frac{\pi}{2}$ par relation de Chasles puis observer par intégration de relation de comparaison

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{u} du \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{u} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$$

et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 3 (****)

On pose $\forall x \geq 0 \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$

1. Montrer que F et G sont définies, continues sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que F et G sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$ et qu'elles sont toutes deux solutions de l'équation

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

3. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Corrigé : 1. La continuité de F sur $\mathbb{R}_+$ est traitée dans l'exercice 3 de la feuille 7. Soit $x \geq 0$.

On a $t \mapsto \frac{1}{x+t}$ et $t \mapsto 1 - \cos(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$-\frac{1 - \cos(t)}{x+t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad -\frac{1 - \cos(t)}{x+t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{(x+t)^2} dt$

sont de même nature. La seconde converge puisque

$$\frac{1 - \cos(t)}{(x+t)^2} \underset{t \rightarrow 0}{=} O(1) \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos(t)}{(x+t)^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par conséquent, on a l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt = \underbrace{\left[\frac{1 - \cos(t)}{x+t} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{(x+t)^2} dt$$

La domination $\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times]0; +\infty[\quad 0 \leq \frac{1 - \cos(t)}{(x+t)^2} \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$

permet d'établir sans difficulté la continuité de la nouvelle écriture de G et on conclut

Les fonctions F et G sont définies, continues sur $\mathbb{R}_+$.

2. Une domination locale permet d'établir sans difficulté que $F \in \mathcal{C}^2(]0; +\infty[, \mathbb{R})$. Pour $x > 0$, on obtient par changement de variable

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u} du = \int_x^{+\infty} \frac{\cos(x)\sin(u) - \sin(x)\cos(u)}{u} du$$

Les intégrales $A(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ et $B(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$ convergent (voir exercice 4, question 2, feuille n°2). Ainsi, par linéarité

$$\forall x > 0 \quad G(x) = \cos(x)A(x) - \sin(x)B(x)$$

Les intégrandes des fonctions A et B sont continues et même de classe $\mathcal{C}^1$ donc A et B sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec A' et B' de classe $\mathcal{C}^1$ d'où A, B de classe $\mathcal{C}^2$ et par conséquent

Les fonctions F et G sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$.

Par dérivation sous l'intégrale, il vient

$$\forall x > 0 \quad F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$$

et avec $\forall x > 0 \quad A'(x) = -\frac{\sin(x)}{x}$ et $B'(x) = -\frac{\cos(x)}{x}$

on trouve

Les fonctions F et G vérifient $y'' + y = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

3. La fonction $F - G$ est donc solution de l'équation homogène $y'' + y = 0$ et par conséquent, il existe a, b réels tels que $F - G = a \cos + b \sin$. Or, on a (convergence assurée)

$$\forall x > 0 \quad 0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

et $G(x) = \cos(x)A(x) \sin(x)B(x)$ avec $A(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ et $B(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$

Par suite $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $G(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$

donc la fonction $a \cos + b \sin$ admet une limite en $+\infty$ ce qui prouve $a = b = 0$. Ainsi, on a

$$\forall x > 0 \quad F(x) = G(x)$$

Par continuité de F et G en 0, il vient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = G(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

Et on conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 4

On pose $\forall x \in [-1; 1] \quad F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+x \cos(t))}{\cos(t)} dt$

1. Montrer que F est définie, continue sur $[-1; 1]$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1; 1 [$.
3. Déterminer une expression simple de F(x) pour $x \in [-1; 1]$.

1. On pose $\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \frac{\ln(1+x \cos(t))}{\cos(t)}$

avec $X = [-1; 1]$ et $I =] 0; \frac{\pi}{2} [$. On vérifie :

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$.
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : Pour $(x, t) \in X \times I$, on a

$$|f(x, t)| \leq \begin{cases} \frac{\ln(1+\cos(t))}{\cos(t)} & \text{si } x \in [0; 1] \\ -\frac{\ln(1-\cos(t))}{\cos(t)} & \text{si } x \in [-1; 0] \end{cases}$$

et on remarque $\ln(1+\cos(t)) \leq -\ln(1-\cos(t)) \iff \ln(1-\cos^2 t) \leq 0$

Ainsi $\forall (x, t) \in X \times I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = -\frac{\ln(1-\cos(t))}{\cos(t)}$

On a $\varphi \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ avec $\varphi(t) \underset{t \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 1$ puis

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} -\frac{\ln\left(\frac{t^2}{2}(1+o(1))\right)}{1+o(1)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -2 \ln t \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

d'où son intégrabilité sur I. On conclut

$$\boxed{F \in \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})}$$

2. Soit $X' =]-1; 1[$. On vérifie :

- Pour $x \in X'$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$, intégrable sur I d'après la domination précédente.
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^1(X', \mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, t) \in X' \times I \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{1 + x \cos(t)}$$

- Pour $x \in X'$, on a $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$.
- Domination : Soit $a \in]0; 1[$. On a

$$\forall (x, t) \in [-a; a] \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t) \quad \text{avec} \quad \psi(t) = \frac{1}{1-a}$$

et ψ clairement continue par morceaux et intégrable sur I . Ainsi, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a; a]$ pour tout $a \in]0; 1[$ et par conséquent

$$\boxed{F \in \mathcal{C}^1(]-1; 1[, \mathbb{R})}$$

3. Par dérivation sous l'intégrale, on trouve

$$\forall x \in]-1; 1[\quad F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + x \cos(t)}$$

On effectue le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. Soit $\varphi :]0; 1[\rightarrow]0; \frac{\pi}{2}[$, $u \mapsto 2 \operatorname{Arctan}(u)$ fonction de classe $\mathcal{C}^1$, bijective, strictement croissante. On obtient par convergence et donc égalité des intégrales concernées

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + x \cos(t)} = \int_0^1 \frac{2 du}{1 + x + (1-x)u^2}$$

Puis

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2 du}{1 + x + (1-x)u^2} &= \frac{2}{1-x} \left[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \operatorname{Arctan} \left(u \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \end{aligned}$$

On pose

$$\forall x \in [-1; 1] \quad G(x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\operatorname{Arccos}(x)^2}{2}$$

La fonction G est dérivable sur $]-1; 1[$ comme composée de telles fonctions et par dérivation, il vient

$$\forall x \in]-1; 1[\quad G'(x) = \frac{\operatorname{Arccos}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Toujours par dérivation, on trouve

$$\frac{d}{dx} \left[\operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \right] = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

D'où

$$\forall x \in]-1; 1[\quad \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2} \operatorname{Arccos}(x) + C^{\text{te}}$$

et la constante d'intégration est nulle en examinant $x = 0$. On a donc

$$\forall x \in]-1; 1[\quad F'(x) = G'(x) \quad \text{et} \quad F(0) = G(0)$$

ce qui prouve que F et G coïncident sur $]-1; 1[$. Enfin, par continuité de F sur $[-1; 1]$, on conclut

$$\boxed{\forall x \in [-1; 1] \quad F(x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\operatorname{Arccos}(x)^2}{2}}$$

Exercice 5 (****)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R}_+^*)$. On pose

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_0^1 f(t)^x dt$$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)^{\frac{1}{x}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)^{\frac{1}{x}}$

Corrigé : On pose $\forall (x, t) \in X \times I \quad g(x, t) = f(t)^x = \exp [x \ln (f(t))]$

avec $X = I = [0; 1]$. Montrons que $F \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$.

• Pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur I comme fonction continue sur un segment.

• Pour tout $t \in I$, d'après les théorèmes généraux, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X .

• Soit $x \in X$. La fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \ln (f(t)) \exp [x \ln (f(t))]$ est continue sur I d'après les théorèmes généraux.

• Domination : On a

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = |\ln (f(t))| \exp |\ln (f(t))|$$

La fonction φ est continue donc intégrable sur le segment I . Par régularité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale

La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ et $F'(x) = \int_0^1 \ln (f(t)) \exp [x \ln (f(t))] dt$ pour $x \in [0; 1]$.

Pour $x \in]0; 1]$ $F(x)^{1/x} = \exp \left(\frac{\ln (F(x))}{x} \right) = \exp \left(\frac{\ln (F(x)) - \ln (F(0))}{x - 0} \right)$

On voit donc apparaître naturellement un taux d'accroissement dans l'expression à étudier. Par conséquent, comme F est dérivable, il vient par continuité de la fonction exponentielle

$$F(x)^{1/x} = \exp \left[\frac{\ln (F(x)) - \ln (F(0))}{x - 0} \right] \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \exp \left[\frac{F'(0)}{F(0)} \right]$$

On conclut

$$F(x)^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \exp \left[\int_0^1 \ln (f(t)) dt \right]$$

Avec $f(t) \leq \|f\|_\infty$, on obtient sans difficulté $F(x)^{1/x} \leq \|f\|_\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f , sa borne supérieure sur le segment $[0; 1]$ est atteinte et par conséquent il existe un segment $[a; b] \subset [0; 1]$ avec $b > a$ tel que

$$\forall t \in [a; b] \quad \|f\|_\infty - \varepsilon \leq f(t)$$

d'où $\int_a^b (\|f\|_\infty - \varepsilon)^x dt \leq \int_a^b f(t)^x dt \leq F(x)$

puis $(b - a)^{1/x} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \leq F(x)^{1/x}$

Comme $(b - a)^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, il existe un seuil $A > 0$ tel que

$$\forall x \geq A \quad (b - a)^{1/x} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \geq \|f\|_\infty - 2\varepsilon$$

d'où $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad | \quad \forall x \geq A \quad \|f\|_\infty - 2\varepsilon \leq F(x)^{1/x} \leq \|f\|_\infty$

Ainsi

$$F(x)^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \|f\|_\infty$$