ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°04

Exercice 1 (*)

Pour x réel, on pose $$\mathrm{F}(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(tx)}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour x réel.

Exercice 2 (**)

Pour $x\geqslant 0$, on pose $$\mathrm{F}(x)=\int_0^{+\infty}\left[\operatorname{Arctan}(x+t)-\operatorname{Arctan}(t)\right]\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
2. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour $x\geqslant 0$.

Exercice 3 (*)

Pour x réel, on pose $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{G}(x)=\left(\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$

1. Montrer que F et G sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\mathrm{F}'+\mathrm{G}'$.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4 (*)

On pose $\forall x>0\quad \mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$ et $\Lambda=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Justifier que F est bien définie, continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{F}(x)$. On pourra chercher à exprimer $\mathrm{F}(x)$ en fonction de Λ pour $x>0$.

Exercice 5 (**)

Pour x réel, on pose $$\mathrm{F}(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que F est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
3. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour x réel.
   On admet l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Gauss).

Exercice 6 (*)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^1 \sin(tx)\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que F est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x}$ se prolonge par continuité et que son prolongement est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 7 (**)

Pour $x \geqslant 0$, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
3. Pour $x > 0$, calculer $\mathrm{F}''(x)$.
4. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour $x \geqslant 0$.