ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

# Feuille d'exercices n°05

## Exercice 1 (**)

Pour $x \geqslant 0$, on pose $\quad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad$ et $\quad \Lambda = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est définie, continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{F}(x)$.
3. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ puis expliciter $\mathrm{F}'(x)$ en fonction de $\Lambda$ pour $x > 0$
4. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\Lambda$.

## Exercice 2 (***)

Pour $x \geqslant 0$, on pose $\quad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est définie, continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{F}(x)$ puis un équivalent simple de $\mathrm{F}(x)$ pour $x \to +\infty$.
3. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ puis étudier la dérivabilité en 0.

## Exercice 3 (***)

Pour $x > -1$, on pose $\quad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{1} \frac{t-1}{\ln(t)} t^x\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty\,[$.
2. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour $x > -1$.

## Exercice 4 (***)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\quad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left[-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right]\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
3. Former une équation différentielle vérifiée par F sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
4. En déduire une expression simple de F sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 5 (***)

Soient $a, b > 0$.

1. Justifier l'existence pour $x$ réel de

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $\mathrm{F}'$.
3. En déduire une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour $x$ réel.

## Exercice 6 (***)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Arctan}\,(x\tan(t))}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple de $\mathrm{F}(x)$ pour $x$ réel.
3. En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ln(2)$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$

## Exercice 7 (***)

On pose $$\forall x \in [\,-1\,;1\,] \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + x\cos(t))}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie, continue sur $[\,-1\,;1\,]$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,-1\,;1\,[$.
3. Déterminer une expression simple de $\mathrm{F}(x)$ pour $x \in [\,-1\,;1\,]$.