ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°06

Exercice 1 (****)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie, continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Étudier la dérivabilité de F en zéro.

Indications : 2. Pour $x > 0$, transformer l'intégrale avec le changement de variable $u = xt$ puis considérer $x \mapsto \dfrac{\mathrm{F}(x)}{x}$.

3. Considérer $\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \mathrm{H}(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u$ et $\mathrm{K}(x) = \displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u$

Vérifier la continuité de K en 0 puis comparer H à une intégrale sur $[\,\varepsilon\,;\pi\,]$ avec $\varepsilon \in \,]\,0\,;\pi\,[$ et utiliser le théorème de limite monotone.

Exercice 2 (***)

Pour $x > 0$, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t+x}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer les limites de F en 0^+ et en $+\infty$.
3. Déterminer des équivalents de F en 0^+ et en $+\infty$.

Indications : 2. Utiliser $\cos(t) \geqslant 1-t$ pour $t \geqslant 0$ pour la limite en 0.

3. Pour $x > 0$, utiliser la monotonie de $t \mapsto \dfrac{1}{t+x}$ pour l'équivalent en $+\infty$ et l'encadrement $1-t \leqslant \cos(t) \leqslant 1$ pour l'équivalent en 0^+.

Exercice 3 (****)

On pose $$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{G}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F et G sont définies, continues sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que F et G sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et qu'elles sont toutes deux solutions de l'équation
$$y'' + y = \frac{1}{x}$$
3. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Indications : 1. Intégrer par parties pour G.

2. Utiliser le changement de variable $u = x+t$ dans $\mathrm{G}(x)$.

3. Déterminer la forme de $\mathrm{F}-\mathrm{G}$ puis la limite de F et G en $+\infty$. Conclure à l'aide de la première question.

Exercice 4

On pose $\forall x \in [-1\,;1] \qquad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+x\cos(t))}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est définie, continue sur $[-1\,;1]$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;1[$.
3. Déterminer une expression simple de $\mathrm{F}(x)$ pour $x \in [-1\,;1]$.

Indications : 1,2. S'inspirer de l'exercice 7 de la feuille 5.
3. Simplifier l'expression $\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$ pour $x \in\,]-1\,;1[$.

Exercice 5 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0\,;1], \mathbb{R}_+^*)$. On pose

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \int_0^1 f(t)^x\,\mathrm{d}t$$

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \mathrm{F}(x)^{\frac{1}{x}}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x)^{\frac{1}{x}}$

Indications : Pour la limite en 0^+, observer que pour $x > 0$

$$\mathrm{F}(x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left[\frac{\ln(\mathrm{F}(x)) - \ln(\mathrm{F}(0))}{x-0}\right]$$

Pour la limite en $+\infty$, comparer $\mathrm{F}(x)^{\frac{1}{x}}$ à $\|f\|_\infty$.