ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026 15/09/25

Préparation à l'interrogation n°02

1 Étude asymptotique

1. Développement limité en 0 à l'ordre $2n+1$ de $\operatorname{sh}(x)$;
2. Développement limité en 0 à l'ordre n de $\ln(1+x)$;
3. Développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\sqrt{1+x}$.

2 Formules

1. Inégalité de Taylor-Lagrange
2. $\sum_{k=n}^{+\infty} \alpha^k$ avec $|\alpha| < 1$

3 Inégalités triangulaires

Pour $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, on a

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \qquad |x-y| \leqslant |x| + |y| \qquad ||x| - |y|| \leqslant |x-y|$$

4 Trigonométrie

Linéariser :

1. $\cos(a)\cos(b)$;
2. $\sin(a)\cos(b)$.

5 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$
2. $\displaystyle\int^x \operatorname{th}(t)\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$

6 Exercice type - Constante γ d'Euler

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Corrigé : On pose $v_n = u_n - u_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$. On a

$$v_n = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ d'après le critère de Riemann et comme c'est une série téléscopique, sa convergence équivaut à celle de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'où

$$\boxed{\exists \gamma \in \mathbb{R} \quad | \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma}$$

7 Exercice type - Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n \,\mathrm{d}t$$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout $n \geqslant 2$.
2. Donner une expression de I_n à l'aide de factorielles en distinguant selon la parité de n.
3. Étudier la monotonie de la suite $(\mathrm{I}_n)_n$.
4. En considérant la suite $(n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1})_{n\geqslant 1}$, déterminer un équivalent de I_n pour $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. En intégrant par parties, il vient

$$\mathrm{I}_n = [-\cos(t)\sin(t)^{n-1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{n-2}\cos(t)^2 \,\mathrm{d}t = (n-1)\,(\mathrm{I}_{n-2} - \mathrm{I}_n)$$

Ainsi $$\boxed{\forall n \geqslant 2 \qquad n\mathrm{I}_n = (n-1)\mathrm{I}_{n-2}}$$

2. On a $\mathrm{I}_n > 0$ pour tout n entier puisque $t \mapsto \sin(t)^n$ est continue positive non nulle. Soit n entier. On a le produit téléscopique

$$\mathrm{I}_{2n} = \mathrm{I}_0 \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{I}_{2k}}{\mathrm{I}_{2(k-1)}}\right) = \mathrm{I}_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \mathrm{I}_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)2k}{(2k)^2} = \mathrm{I}_0 \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

et $$\mathrm{I}_{2n+1} = \mathrm{I}_1 \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{I}_{2k+1}}{\mathrm{I}_{2k-1}}\right) = \mathrm{I}_1 \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{2k+1}\right) = \mathrm{I}_1 \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{2k(2k+1)} = \mathrm{I}_1 \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Avec $\mathrm{I}_0 = \pi/2$ et $\mathrm{I}_1 = 1$, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}$$

3. La suite $(\mathrm{I}_n)_n$ est clairement décroissante.
4. En multipliant la relation établie à la première question par I_{n-1}, on trouve

$$\forall n \geqslant 2 \qquad n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1} = (n-1)\mathrm{I}_{n-1}\mathrm{I}_{n-2}$$

ce qui prouve que la suite est constante. Par suite

$$\forall n \geqslant 1 \qquad n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1} = \mathrm{I}_1\mathrm{I}_0 = \frac{\pi}{2}$$

Par décroissance et positivité de $(\mathrm{I}_n)_n$, il vient

$$n\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n = (n+1)\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n \times \frac{n}{n+1} \leqslant n\mathrm{I}_n^2 \leqslant n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1}$$

Par encadrement $$\boxed{\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

Remarque : L'intégrale I_n est communément appelée *intégrale de Wallis*.

8 Questions de cours

Séries numériques, graphes usuels.