Test de rentrée - 2h

Exercice 1 (*)

Calculer
$$\sum_{k=1}^n 2^k \binom{n}{k}$$

Corrigé : On a
$$\sum_{k=1}^n 2^k \binom{n}{k} = (2+1)^n - 1 = 3^n - 1$$

Exercice 2 (**)

Soit n entier non nul.

1. Calculer $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$.

2. En déduire l'égalité
$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$$

puis préciser la valeur de ces sommes.

Corrigé : On note $a = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $b = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$. On a

$$\begin{cases} a + b = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \\ a - b = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$$

Exercice 3 (*)

Calculer
$$\sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} 2^\ell$$

Corrigé : On a
$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n 2^j = \sum_{i=1}^n [2^{n+1} - 2^i] = (n-1)2^{n+1} + 2$$

Exercice 4 (**)

Soit n entier non nul et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^n \omega^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k \omega^k$$

Corrigé : On suppose $n \geq 2$. On a $\omega \neq 1$ puis

$$\sum_{k=1}^n \omega^k = \omega \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = 0$$

On note $S_n = \sum_{k=1}^n k\omega^k$. Avec un changement d'indice, on trouve

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^{k+1} = \omega \sum_{k=0}^{n-1} k\omega^k + \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega(S_n - n)$$

En isolant S_n , on conclut

$$\boxed{\forall n \geq 2 \quad \sum_{k=1}^n \omega^k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k\omega^k = \frac{n\omega}{\omega - 1}}$$

Remarque : Si $n = 1$, on a $\sum_{k=1}^n \omega^k = \sum_{k=1}^n k\omega^k = 1$.

Variante : Pour le calcul de S_n , on peut aussi considérer $S_n = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^k \omega^k = \sum_{1 \leq \ell \leq k \leq n} \omega^k$ et permuter

l'ordre de sommation ou alors considérer $T_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$, déterminer $xT_n'(x)$ puis évaluer en $x = \omega$.

Exercice 5 (**)

Soit n entier et x réel. Déterminer une expression simple de $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

Corrigé : On a
$$S_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx) = \text{Im} \left(\sum_{k=0}^n e^{ikx} \right)$$

La somme $\sum_{k=0}^n e^{ikx}$ est géométrique de raison e^{ix} . On suppose $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ (raison égale à 1 sinon).

Avec une factorisation d'angle moitié, il vient

$$S_n = \text{Im} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right) = \text{Im} \left(\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x} - 2i \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{e^{i\frac{x}{2}} - 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \sin(kx) = \begin{cases} \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Exercice 6 (*)

Calculer
$$\int_0^1 \text{Arctan}(t) dt$$

Corrigé : En intégrant par partie, on trouve

$$\int^x \text{Arctan}(t) dt = [x \text{Arctan}(x)] - \int^x \frac{t}{1+t^2} dt = x \text{Arctan}(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$$

Ainsi

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan}(t) dt = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

Exercice 7 (*)

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

Corrigé : Après changement d'indice, on reconnaît une somme de Riemann et il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$$

Exercice 8 (**)

Soit n entier non nul. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} [\ln(x+k+1) - \ln(k+1)]$.

Corrigé : Soit $x > 0$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} [\ln(x+k+1) - \ln(k+1)] &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left[\ln x + \ln \left(1 + \frac{k+1}{x} \right) - \ln(k+1) \right] \\ &= (\ln x)(1-1)^n + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\ln \left(1 + \frac{k+1}{x} \right) - \ln(k+1) \right) \end{aligned}$$

On conclut $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} [\ln(x+k+1) - \ln(k+1)] \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \ln(k+1)$

Exercice 9 (**)

Soit $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et admettant une limite finie en $+\infty$. A-t-on $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$?

Corrigé : On pose $\forall x \geq 1 \quad f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$

On a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et f dérivable sur $[1; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Par dérivation, il vient

$$\forall x \geq 1 \quad f'(x) = 2 \cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 2 \cos(x^2) + o(1)$$

Comme la fonction $\cos$ n'admet pas de limite en $+\infty$, alors la fonction f' non plus. Ainsi

On n'a pas f' de limite nulle en $+\infty$.

Exercice 10 (***)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([-1; 1], \mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = 0$ et

$$\forall t \in [-1; 1] \quad f(t)^2 = 2f(t) - t$$

Déterminer une expression simple de $f(t)$ pour $t \in [-1; 1]$.

Corrigé : Soit $t \in [-1; 1]$. Le réel $f(t)$ est racine de $X^2 - 2X + t$ d'où

$$\forall t \in [-1; 1] \quad f(t) \in \{1 + \sqrt{1-t}, 1 - \sqrt{1-t}\}$$

On a clairement $f(1) = 1$. On pose

$$\forall t \in [-1; 1[\quad \varepsilon(t) = \frac{f(t) - 1}{\sqrt{1-t}}$$

La fonction ε est continue sur $[-1; 1[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'image $\varepsilon([-1; 1[)$ est un intervalle inclus dans $\{-1, 1\}$ et donc réduit à $\{1\}$ ou $\{-1\}$. On observe $\varepsilon(0) = -1$ d'où $\text{Im } \varepsilon = \{-1\}$. On conclut

$$\boxed{\forall t \in [-1; 1] \quad f(t) = 1 - \sqrt{1-t}}$$

Exercice 11 (*)

L'ensemble $A = \{-1, 0, 1\}$ est-il un groupe multiplicatif ?

Corrigé : La loi $\times$ est interne sur A , associative et admet 1 pour élément neutre. En revanche, l'élément 0 n'admet pas de symétrique pour $\times$ d'où

$$\boxed{\text{L'ensemble } \{-1, 0, 1\} \text{ n'est pas un groupe multiplicatif.}}$$

Exercice 12 (**)

Soit n entier et θ réel. Établir

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)) \quad \text{avec} \quad T_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}$$

Corrigé : Soit n entier et θ réel. On a

$$\cos(n\theta) = \text{Re} (e^{i\theta})^n = \text{Re} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (i \sin(\theta))^k (\cos(\theta))^{n-k} = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (\cos(\theta)^2 - 1)^k \cos(\theta)^{n-2k}$$

On conclut

$$\boxed{\forall (n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))}$$

Remarque : Les polynômes $(T_n)_n$ sont appelés *polynômes de Tchebychev de première espèce*.

Exercice 13 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E . On pose

$$\forall x \in E \quad \Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$$

Montrer

$$\Phi \text{ surjective} \implies (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \text{ libre}$$

Corrigé : Supposons Φ surjective. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i = 0$. On note $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Par surjectivité, pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $x_i \in E$ tel que $\Phi(x_i) = e_i$. Par suite

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{\varphi_i(x_k)}_{\delta_{i,k}} = \alpha_k = 0$$

d'où la liberté de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. On conclut

$$\boxed{\Phi \text{ surjective} \implies (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \text{ libre}}$$

Exercice 14 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E . Montrer

$$u \circ p = p \circ u \iff u(\text{Im } p) \subset \text{Im } p \quad \text{et} \quad u(\text{Ker } p) \subset \text{Ker } p$$

Corrigé : Supposons $u \circ p = p \circ u$. Pour $x \in E$, on a $u(p(x)) = p(u(x)) \in \text{Im } p$ ce qui prouve $u(\text{Im } p) \subset \text{Im } p$ et pour $x \in \text{Ker } p$, on a $p(u(x)) = u(p(x)) = 0_E$ d'où $u(\text{Ker } p) \subset \text{Ker } p$. Réciproquement, soit $x \in E$. On décompose $x = a + b$ avec $(a, b) \in \text{Im } p \times \text{Ker } p$. Sachant $\text{Im } p = \text{Ker } \text{id} - p$, on a $p(a) = a$ et par stabilité, on a $u(a) \in \text{Im } p$ et $u(b) \in \text{Ker } p$. Ainsi

$$u \circ p(x) = u(p(a)) = u(a) \quad \text{et} \quad p \circ u(x) = p(u(a)) = u(a)$$

On conclut

$$u \circ p = p \circ u \iff u(\text{Im } p) \subset \text{Im } p \quad \text{et} \quad u(\text{Ker } p) \subset \text{Ker } p$$

Exercice 15 (*)

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ avec n entier non nul. Pour $P \in E$, on pose $\varphi(P) = XP'$. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer $\text{mat}_{\mathcal{C}}\varphi$ où $\mathcal{C}$ désigne la base canonique de E .

Corrigé : Pour $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{K} \times E^2$, on a par bilinéarité du produit et linéarité de la dérivation

$$\varphi(\lambda P + Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$$

Puis

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \varphi(X^k) = kX^k$$

d'où $\varphi(X^k) \in E$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Par caractérisation d'une application linéaire sur une base, on conclut

$$\varphi \in \mathcal{L}(E) \quad \text{et} \quad \text{mat}_{\mathcal{C}}\varphi = \text{diag}(0, 1, \dots, n)$$

Exercice 16 (*)

Soit
$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ P & \longmapsto (P(0), P'(0), \dots, P^{(n-1)}(0)) \end{cases}$$

Montrer que φ est bijective.

Corrigé : On a $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_{n-1}[X], \mathbb{K}^n)$, la linéarité résultant simplement de la linéarité de la dérivation et de l'évaluation. On remarque l'égalité des dimensions

$$\dim \mathbb{K}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{K}^n$$

On a donc φ isomorphisme si et seulement si φ injective (si et seulement si φ surjective). Soit $P \in \text{Ker } \varphi$. On a 0 racine de P de multiplicité n donc X^n divise P mais $\deg P \leq n-1$. Il s'ensuit que P est le polynôme nul et par suite

$$\text{L'application } \varphi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{K}_{n-1}[X] \text{ sur } \mathbb{K}^n.$$

Exercice 17 (*)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire réelle, ε un réel et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Comparer les événements $\{X \geq \varepsilon\}$ et $\{f(X) \geq f(\varepsilon)\}$ si f est croissante.

2. En déduire
$$\forall t \geq 0 \quad \mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon} \mathbb{E}(e^{tX})$$

Corrigé : 1. Par croissance de f , on a l'inclusion

$$\boxed{\{X \geq \varepsilon\} \subset \{f(X) \geq f(\varepsilon)\}}$$

2. Soit $t \geq 0$. D'après ce qui précède appliqué à la fonction $x \mapsto e^{tx}$, on a

$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{t\varepsilon})$$

La variable aléatoire e^{tX} est positive et d'après l'inégalité de Markov, on conclut

$$\boxed{\forall t \geq 0 \quad \mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon} \mathbb{E}(e^{tX})}$$

Exercice 18 (**)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, n entier non nul, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $L_n(t) = \mathbb{E}(e^{t \frac{S_n}{\sqrt{n}}})$ pour t réel. Montrer que pour tout t réel, la suite $(L_n(t))_{n \geq 1}$ converge.

Corrigé : Soit t réel. Par indépendances des X_i puis égalité en loi, il vient

$$L_n(t) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{\frac{tX_i}{\sqrt{n}}}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{\frac{tX_i}{\sqrt{n}}}\right) = \left(\mathbb{E}\left(e^{\frac{tX_1}{\sqrt{n}}}\right)\right)^n$$

Par transfert, on trouve

$$L_n(t) = \text{ch}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{n \ln \text{ch}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} = e^{n\left(\frac{t}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad L_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{\frac{t^2}{2}}}$$

Exercice 19 (*)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose

$$\forall (P, Q) \in E^2 \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\sin \theta) Q(\sin \theta) d\theta$$

Justifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Corrigé : Pour $(P, Q) \in E$, l'intégrale définissant $\langle P, Q \rangle$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur un segment, l'intégrande $\theta \mapsto P(\sin \theta) Q(\sin \theta)$ étant continue sur $[0; \pi]$. La forme est clairement symétrique, linéaire en la première variable par bilinéarité du produit et linéarité de l'intégrale. Pour $P \in E$, on a

$$\langle P, P \rangle = \int_0^\pi P^2(\sin \theta) d\theta \geq 0$$

par positivité de l'intégrale. Enfin, si $\langle P, P \rangle = 0$, l'intégrande $\theta \mapsto P^2(\sin \theta)$ étant continue positif sur $[0; \pi]$, il vient

$$\forall \theta \in [0; \pi] \quad P^2(\sin \theta) = 0$$

d'où

$$\forall \theta \in [0; \pi] \quad P(\sin \theta) = 0$$

Or, la fonction $\theta \mapsto \sin \theta$ réalise une surjection de $[0; \pi]$ sur $[0; 1]$ d'où

$$\forall t \in [0; 1] \quad P(t) = 0$$

Ainsi, le polynôme P admet une infinité de racines ce qui prouve qu'il s'agit du polynôme nul.

On conclut $\boxed{\text{L'application } (P, Q) \in E^2 \mapsto \langle P, Q \rangle \text{ est un produit scalaire sur } E.}$

Exercice 20 (*)

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Établir
$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

2. Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

Corrigé : 1. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Soit $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n \quad |\langle x, u \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \|u\| \|x\| = \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}$$

2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si la famille (x, u) est liée d'où

$\boxed{\text{Le cas d'égalité est réalisé si et seulement si } x = \alpha u \text{ avec } \alpha \text{ réel.}}$