ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026 06/09/25

Test de rentrée - 2h

Exercice 1 (*)

Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} 2^k \binom{n}{k}$$

Exercice 2 (**)

Soit n entier non nul.

1. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.
2. En déduire l'égalité
$$\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1}$$
puis préciser la valeur de ces sommes.

Exercice 3 (*)

Calculer
$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n} 2^{\ell}$$

Exercice 4 (**)

Soit n entier non nul et $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$. Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} \omega^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k\omega^k$$

Exercice 5 (**)

Soit n entier et x réel. Déterminer une expression simple de $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

Exercice 6 (*)

Calculer
$$\int_0^1 \mathrm{Arctan}\,(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 7 (*)

Déterminer
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Exercice 8 (**)

Soit n entier non nul. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left[\ln(x+k+1) - \ln(k+1)\right]$.

Exercice 9 (**)

Soit $f : [\,1\,;+\infty\,[\, \to \mathbb{R}$ dérivable et admettant une limite finie en $+\infty$. A-t-on $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$?

Exercice 10 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,-1\,;1\,], \mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = 0$ et

$$\forall t \in [\,-1\,;1\,] \qquad f(t)^2 = 2f(t) - t$$

Déterminer une expression simple de $f(t)$ pour $t \in [\,-1\,;1\,]$.

Exercice 11 (*)

L'ensemble $\mathrm{A} = \{-1, 0, 1\}$ est-il un groupe multiplicatif ?

Exercice 12 (**)

Soit n entier et θ réel. Établir

$$\cos(n\theta) = \mathrm{T}_n(\cos(\theta)) \quad \text{avec} \quad \mathrm{T}_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (\mathrm{X}^2 - 1)^k \mathrm{X}^{n-2k}$$

Exercice 13 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \Phi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

Montrer $$\Phi \text{ surjective} \Longrightarrow (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \text{ libre}$$

Exercice 14 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et p un projecteur de E. Montrer

$$u \circ p = p \circ u \iff u(\mathrm{Im}\ p) \subset \mathrm{Im}\ p \quad \text{et} \quad u(\mathrm{Ker}\ p) \subset \mathrm{Ker}\ p$$

Exercice 15 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ avec n entier non nul. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, on pose $\varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{XP}'$. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\varphi$ où $\mathscr{C}$ désigne la base canonique de E.

Exercice 16 (*)

Soit $$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ \quad \mathrm{P} \quad \longmapsto (\mathrm{P}(0), \mathrm{P}'(0), \ldots, \mathrm{P}^{(n-1)}(0)) \end{cases}$$

Montrer que φ est bijective.

Exercice 17 (*)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire réelle, ε un réel et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Comparer les événements $\{\mathrm{X} \geqslant \varepsilon\}$ et $\{f(\mathrm{X}) \geqslant f(\varepsilon)\}$ si f est croissante.
2. En déduire $$\forall t \geqslant 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathrm{e}^{-t\varepsilon}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}\right)$$

Exercice 18 (**)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, n entier non nul, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $L_n(t) = \mathbb{E}(e^{t\frac{S_n}{\sqrt{n}}})$ pour t réel. Montrer que pour tout t réel, la suite $(L_n(t))_{n \geqslant 1}$ converge.

Exercice 19 (*)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose

$$\forall (P, Q) \in E^2 \qquad \langle P, Q \rangle = \int_0^{\pi} P(\sin\theta) Q(\sin\theta) d\theta$$

Justifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Exercice 20 (*)

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Établir $$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leqslant \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$
2. Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.