

Corrigé du devoir surveillé n°1 - 4h

Partie I

1.(a) La fonction g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* comme quotient de fonctions de classe \mathcal{C}^1 dont le dénominateur ne s'annule pas. Par ailleurs, on a $g(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$ et on en déduit la continuité de g sur \mathbb{R} . Par dérivation, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad g'(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}$$

Avec les développements usuels, on trouve

$$g'(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{t(1 + o(t)) - t + o(t^2)}{t^2} = o(1) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

D'après le théorème de prolongement de classe \mathcal{C}^1 , on conclut

$$\boxed{g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

1.(b).i Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t}$ et $t \mapsto 1 - \cos t$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$. On a

$$\frac{1 - \cos t}{t} \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1 - 1 + o(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos t}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{O(1)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Le crochet $\left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]_0^{+\infty}$ étant fini, les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} -\frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ sont de même nature. Soit $f : t > 0 \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$. On a $f \in \mathcal{C}_{pm}(]0; +\infty[, \mathbb{R})$ puis

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1 - 1 + t^2/2 + o(t^2)}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

La fonction f est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur $]0; 1]$ et intégrable sur $[1; +\infty[$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ converge et par conséquent

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ converge.}}$$

1.(b).ii Soit j entier non nul. Avec le changement de variables $u = jt$, les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales :

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$$

1.(c) On a $\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \ln\left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} + o(t^4)\right) = -\frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{1}{2} \frac{t^4}{(3!)^2} + o(t^4)$

D'où
$$\boxed{\ln g(t) = -\frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{180} + o(t^4)}$$

1.(d) Soit n entier non nul. Avec le changement de variables $u = \sqrt{\frac{n}{3}}t$, il vient

$$\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt = \sqrt{\frac{3}{n}} \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{3}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Or, on a
$$\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{3}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

On en déduit
$$\boxed{\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}}$$

2.(a) Soit $n \geq 2$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin^n t}{t^n}$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$. On a

$$\frac{\sin^n t}{t^n} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^n}{t^n} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sin^n t}{t^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^n}\right)$$

On en déduit l'intégrabilité de la fonction sur $]0; 1]$ puisqu'elle prolongeable par continuité en 0 et sur $[1; +\infty[$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } n \geq 2, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n} dt \text{ converge.}}$$

2.(b) D'après l'intégration par parties effectuée à la question 1.(b).i, on a l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \underbrace{\left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

Par trigonométrie, on a
$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t/2)}{t^2} dt$$

Avec le changement de variables $u = \frac{t}{2}$, les intégrales $2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t/2)}{t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du$ sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. On conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$$

3.(a) Soit n entier non nul et $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad h_n(t) = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^n = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} (-1)^{n-\ell} e^{i(2\ell-n)t}$$

La fonction h_n est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} d'après les théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad h_n^{(k)}(t) = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} (-1)^{n-\ell} (2\ell - n)^k (i)^k e^{i(2\ell-n)t}$$

Par inégalité triangulaire, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \left| h_n^{(k)}(t) \right| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} |2\ell - n|^k$$

Ce qui prouve

$$\boxed{\text{Pour } k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \text{ il existe } K > 0 \text{ tel que, pour } t \text{ réel, on a } \left| h_n^{(k)}(t) \right| \leq K.}$$

Remarque : Le sujet indique pour $t > 0$ dans la définition de h_n puis considère la fonction sur \mathbb{R} tout entier, ce qui ne pose pas de problème de toute façon.

Variante : On aurait aussi justifier que $h_n^{(k)}$ est 2π -périodique comme dérivée d'une telle fonction, continue donc bornée sur une période et par conséquent bornée sur \mathbb{R} tout entier par périodicité.

3.(b).i Soit n entier non nul. On a

$$h_n(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} (t + o(t))^n = (t(1 + o(1)))^n = t^n(1 + o(1))^n \quad \text{avec} \quad (1 + o(1))^n \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

D'où

$$\boxed{h_n(t) = t^n + o(t^n)}$$

3.(b).ii Soit n entier non nul et $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Par dérivation d'un développement limité, il vient

$$h_n^{(k)}(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} + o(t^{n-k})$$

D'où

$$\boxed{\frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{n!}{(n-k)!}}$$

3.(c) Soit $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$. La fonction $t \mapsto \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et, d'après la majoration établie à la question 3.(a)

$$\frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{n-k}}\right)$$

La fonction est donc intégrable sur $]0; 1]$ (faussement impropre) et sur $[1; +\infty[$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } n \geq 2 \text{ et } k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt \text{ converge absolument.}}$$

3.(d) Soit $n \geq 2$. Les fonctions $t \mapsto h_n^{(n-2)}(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$. D'après le résultat de la question 3.(b).ii, on a $h_n^{(n-2)}(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{n!}{2} t^2$ et d'après le résultat de la question 3.(a), on a $h_n^{(n-2)}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(1)$. Ainsi

$$\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{n!}{2} t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} -\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2} dt$$

sont de même nature. La fonction $t \mapsto \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2}$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ puis

$$\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{n!}{2} \quad \text{et} \quad \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

On en déduit son intégrabilité sur $]0; 1]$ car prolongeable par continuité en 0 et sur $[1; +\infty[$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt \text{ converge.}}$$

L'intégration par parties mise en œuvre donne l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt = \underbrace{\left[\frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2} dt$$

Avec des intégrations par parties successives, on peut conjecturer que la propriété

$$\mathcal{P}(k) : \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n} dt = \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt$$

est vraie pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. On a clairement $\mathcal{P}(0)$ vraie. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour $k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$. Ceci suppose l'intégrale à droite dans l'égalité convergente. Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{(n-k-1)t^{n-k-1}}$ et $h_n^{(k)}$ sont de classe \mathcal{C}^1 . On a

$$-\frac{h_n^{(k)}(t)}{(n-k-1)t^{n-k-1}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{n!}{(n-k)!(n-k-1)} \frac{t^{n-k}}{t^{n-k-1}} \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$$

et

$$-\frac{h_n^{(k)}(t)}{(n-k-1)t^{n-k-1}} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{n-k-1}}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

Ainsi, le crochet $\left[-\frac{h_n^{(k)}(t)}{(n-k-1)t^{n-k-1}} \right]_0^{+\infty}$ est fini, nul et on a

$$\begin{aligned} \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt &= \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!} \frac{1}{n-k-1} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k+1)}(t)}{t^{n-k-1}} dt \\ &= \frac{(n-1-(k+1))!}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k+1)}(t)}{t^{n-(k+1)}} dt \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. Avec $k = n-1$, on conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt}$$

4.(a) Soit n entier non nul. Pour t réel, on a

$$h_{2n}(t) = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^{2n} = \frac{1}{(2i)^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k e^{-ikt} e^{i(2n-k)t} = \frac{1}{4^n (-1)^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k e^{i(2n-2k)t}$$

En observant $(-1)^n = (-1)^{-n}$, on conclut

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad h_{2n}(t) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{n+k} e^{i(2n-2k)t}}$$

4.(b) Soit n entier non nul. Par dérivation, on a pour t réel

$$\begin{aligned} h_{2n}^{(2n-1)}(t) &= \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{n+k} (2n-2k)^{2n-1} (i)^{2n-1} e^{i(2n-2k)t} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{n+k} (n-k)^{2n-1} (-1)^n (-i) e^{i(2n-2k)t} \end{aligned}$$

Comme la fonction $h_{2n}^{(2n-1)}$ est réelle, il vient en prenant la partie réelle dans le membre de gauche

$$h_{2n}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k (n-k)^{2n-1} \sin(2(n-k)t)$$

On observe que le terme en $k = n$ est nul et on sépare cette somme en deux : pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ et pour $k \in \llbracket n+1; 2n \rrbracket$. Dans la première somme, on fait le changement d'indice $\ell = n - k$ et dans la deuxième $\ell = k - n$. On obtient

$$2h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{\ell=1}^n \binom{2n}{n-\ell} (-1)^{n-\ell} \ell^{2n-1} \sin(2\ell t) + \sum_{\ell=1}^n \binom{2n}{\ell+n} (-1)^{n+\ell} (-\ell)^{2n-1} \sin(-2\ell t)$$

On observe $\forall \ell \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \binom{2n}{n-\ell} = \binom{2n}{2n-(n-\ell)} = \binom{2n}{n+\ell} \quad (-1)^{n-\ell} = (-1)^{n+\ell}$

et avec l'imparité du sin, on conclut

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{n+\ell} \binom{2n}{\ell+n} \ell^{2n-1} \sin(2\ell t)$$

4.(c) Par linéarité de l'intégrale, toutes les intégrales concernées étant convergentes d'après le résultat de la question 1.(b).ii, on a pour n entier non nul

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{2n} dt &= \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_{2n}^{(2n-1)}(t)}{t} dt \\ &= \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^{+\infty} \sum_{\ell=1}^n (-1)^{n+\ell} \binom{2n}{\ell+n} \ell^{2n-1} \frac{\sin(2\ell t)}{t} dt \\ \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{2n} &= \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{\ell=1}^n (-1)^{n+\ell} \binom{2n}{\ell+n} \ell^{2n-1} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\ell t)}{t} dt \end{aligned}$$

Et on conclut
$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{2n} dt = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{\ell=1}^n (-1)^{n+\ell} \binom{2n}{\ell+n} \ell^{2n-1}$$

5.(a) Pour $n \geq 2$, on a $\forall t \geq \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq \frac{|\sin t|^n}{t^n} \leq \frac{1}{t^n}$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n}$ converge, il vient par comparaison et inégalité triangulaire

$$\left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n} dt \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{|\sin t|^n}{t^n} dt \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{dt}{t^n} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{n-1}$$

On conclut
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n} dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

5.(b).i On pose $\forall t \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right] \quad \varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$

La fonction est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. On trouve

$$\forall t \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right] \quad \varphi'(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}$$

On pose $\forall t \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right] \quad \psi(t) = t \cos t - \sin t$

On a ψ dérivable et par dérivation

$$\forall t \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right] \quad \psi'(t) = -t \sin t \leq 0$$

Comme $\psi(0) = 0$, on en déduit ψ négative et on conclut

La fonction φ décroît.

5.(b).ii Soit n entier non nul. On note $\varepsilon_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. On a $\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ par croissances comparées. On choisit n assez grand pour avoir $\varepsilon_n \leq \frac{\pi}{2}$. Par décroissance de φ , il vient

$$\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \varphi^n(t) dt \leq \int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \varphi^n(\varepsilon_n) dt = \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n \right) \varphi^n(\varepsilon_n)$$

Puis
$$\ln \varphi^n(\varepsilon_n) = n \ln g(\varepsilon_n) = -\frac{n\varepsilon_n^2}{6} + o(n\varepsilon_n^2) = -\frac{(\ln n)^2}{6} + o((\ln n)^2)$$

d'où
$$\underbrace{\sqrt{n} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n \right)}_{=O(1)} \varphi^n(\varepsilon_n) = O(1) \exp \left[\underbrace{\frac{\ln n}{2} - \frac{(\ln n)^2}{6} + o((\ln n)^2)}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty} \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Ainsi

$$\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

5.(c).i La fonction $h : u \mapsto e^{-u}$ est dérivable sur \mathbb{R} avec $|h'(u)| = e^{-u} \leq 1$ pour $u \geq 0$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis

$$\forall u \geq 0 \quad |h(u) - h(0)| \leq 1 |u - 0|$$

Autrement dit

$$\forall u \geq 0 \quad |e^{-u} - 1| \leq u$$

Remarque : La question est étrangement mal posée. N'importe quel $a > 0$ fait l'affaire et on peut faire mieux que l'inégalité exigée en se passant du facteur 2.

5.(c).ii On pose
$$\forall t \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right] \quad h(t) = \ln \left(\frac{\sin t}{t} \right) + \frac{t^2}{6}$$

On a obtenu précédemment

$$h(t) = -\frac{t^4}{180} + o(t^4) = t^4 \underbrace{\left(-\frac{1}{180} + o(1) \right)}_{\xrightarrow[t \rightarrow 0]{} -\frac{1}{180} < 0}$$

On en déduit que h est négative au voisinage de 0. Par ailleurs, on a $-\frac{t^4}{180} \geq -t^3$ au voisinage de zéro puisque $t^4 \underset{t \rightarrow 0}{=} o(t^3)$. Par conséquent, pour un choix de voisinage de zéro suffisamment petit, les deux conditions mentionnées sont réalisées autrement dit

On dispose de $b > 0$ tel que pour $t \in]0; b]$, on a $-t^3 \leq \ln \left(\frac{\sin t}{t} \right) + \frac{t^2}{6} \leq 0$.

5.(c).iii On a $\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ par croissances comparées. On choisit n assez grand pour avoir $\varepsilon_n \in]0; b]$ et donc $-t^3 \leq h(t) \leq 0$ pour $t \in]0; \varepsilon_n]$. On obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\varepsilon_n} \left[\left(\frac{\sin t}{t} \right)^n - e^{-\frac{nt^2}{6}} \right] dt \right| &= \left| \int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}} [e^{nh(t)} - 1] dt \right| \\ &\leq \int_0^{\varepsilon_n} \underbrace{e^{-\frac{nt^2}{6}}}_{\leq 1} (1 - e^{nh(t)}) dt \leq \int_0^{\varepsilon_n} (1 - e^{-nt^3}) dt \end{aligned}$$

Avec la majoration de la question 5.(c).i (avec le facteur 2), il vient

$$\left| \int_0^{\varepsilon_n} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt - \int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right| \leq \int_0^{\varepsilon_n} 2nt^3 dt \leq 2n(\varepsilon_n)^3 \varepsilon_n \leq \frac{2(\ln n)^4}{n}$$

Remarque : Là encore, il est aisé de faire mieux que ce qu'exige le sujet :

$$\left| \int_0^{\varepsilon_n} \left[\left(\frac{\sin t}{t} \right)^n - e^{-\frac{nt^2}{6}} \right] dt \right| \leq \int_0^{\varepsilon_n} nt^3 dt = \frac{n\varepsilon_n^4}{4} = \frac{(\ln n)^4}{4n}$$

5.(c).iv Soit n entier non nul. Par relation de Chasles, on a

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt = \int_0^{\varepsilon_n} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt + \int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt$$

Par croissances comparées, on a $\frac{2(\ln n)^4}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Ainsi, d'après les résultats intermédiaires précédemment établis, on a

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

et

$$\int_0^{\varepsilon_n} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt = \sqrt{\frac{3\pi}{2n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

On conclut

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$$

Partie II

1.(a) Soit n entier non nul. La seule configuration possible pour une seule montée dans une liste de S_n est $(1, 2, \dots, n)$ et la seule configuration possible pour n montées est $(n, n-1, \dots, 1)$. En effet, pour une unique montée, si la liste n'est pas strictement croissante alors il y a au moins deux montées ce qui est exclu. De même, pour n montées, si la liste n'est pas strictement décroissante, il y a au plus $n-1$ montées ce qui est exclu. On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad E_n(1) = 1 \quad \text{et} \quad E_n(n) = 1}$$

1.(b) Soit n entier non nul et $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Dans la liste $(k, k-1, \dots, 1, k+1, k+2, \dots, n)$, on a $(k), (k-1), \dots, (2)$ et $(1, k+1, \dots, n)$ montées d'où

$$\boxed{\text{La liste } (k, k-1, \dots, 1, k+1, k+2, \dots, n) \text{ admet } k \text{ montées.}}$$

2. Soit a une liste et s_i la somme du nombre de montées et de descentes de (a_1, \dots, a_i) pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Pour $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, on a, comptant respectivement les montées et descentes

$$s_{i+1} = \begin{cases} s_i + 0 + 1 & \text{si } a_i < a_{i+1} \\ s_i + 1 + 0 & \text{si } a_i > a_{i+1} \end{cases}$$

On a donc $s_{i+1} = s_i + 1$ et $s_1 = 2$ car sur une liste à un élément, il y a une même montée et descente. On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n = s_1 + n - 1 = n + 1}$$

3.(a) L'application Ψ est bien à valeurs dans S_n et on a clairement $\Psi^2 = \text{id}$ ce qui prouve qu'elle est bijective et est son propre inverse.

$\boxed{\text{L'application } \Psi \text{ est une bijection de } S_n \text{ dans } S_n.}$

3.(b) Soit n entier non nul et $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Une montée $a_p < a_{p+1} < \dots < a_q$ est transformée, *via* l'application Ψ , en descente $n + 1 - a_p > \dots > n + 1 - a_q$ et de même pour les montées qui seraient des singletons. Ainsi, une liste a avec k montées devient une liste avec k descentes et les $n + 1 - k$ descentes deviennent $n + 1 - k$ montées. Par conséquent

$$\{a \in S_n; M(a) = k\} = \{a \in S_n; M(\Psi(a)) = n + 1 - k\} = \{b \in S_n; M(b) = n + 1 - k\}$$

en posant $b = \Psi(a)$ comme changement de variable bijectif dans le parcours du dernier ensemble. Considérant les cardinaux, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad E_n(k) = E_n(n + 1 - k)}$$

4.(a) Soit $n \geq 2$. Choisir un couple (A, B) de parties non vides disjointes de $\llbracket 1; n \rrbracket$, c'est choisir $k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$ éléments qui vont constituer A et les éléments restants constituent B . Ainsi, le nombre de choix possibles est

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} = 2^n - 2}$$

4.(b) Une liste $a = (a_1, \dots, a_n)$ admet deux montées exactement si elle vérifie

$$a_1 < \dots < a_k \quad a_k > a_{k+1} \quad a_{k+1} < \dots < a_n$$

Ceci équivaut à choisir A et B , parties non vides disjointes de $\llbracket 1; n \rrbracket$ avec $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ et $B = \{a_{k+1}, \dots, a_n\}$ telles que $a_k > a_{k+1}$. Si cette dernière condition n'est pas remplie, alors on a $a_1 < \dots < a_k < a_{k+1} < \dots < a_n$ ce qui impose $a_i = i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Ces configurations, pour $k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$, sont donc à exclure et on conclut

$$\boxed{\forall n \geq 2 \quad E_n(2) = 2^n - 2 - (n - 1) = 2^n - (n + 1)}$$

5.(a) Soit n entier non nul. Pour $b = (a_1, \dots, a_n) \in S_n$, on a

$$\boxed{\varphi_n^{-1}(\{b\}) = \{(n + 1, a_1, \dots, a_n), (a_1, n + 1, a_2, \dots, a_n), \dots, (a_1, \dots, a_n, n + 1)\}}$$

5.(b) Soit $b = (a_1, \dots, a_n) \in S_n$ avec k montées. Si $a = (n + 1, a_1, \dots, a_n)$, alors la liste a admet une montée en plus, à savoir $(n + 1)$ et la liste a admet donc $k + 1$ montées. Si $a = (a_1, \dots, a_n, n + 1)$, le $n + 1$ en dernière position fera partie de la dernière montée existante dans n donc il y a k montées dans a . Pour les autres configurations, on a $a = (a_1, \dots, a_i, n + 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$ et on a $k + 1$ montées si $a_i < a_{i+1}$ puisque l'insertion de $n + 1$ casse la croissance tandis qu'on aura toujours k montées si $a_i > a_{i+1}$ puisque $n + 1$ sera aggloméré à la montée se terminant par a_i . On a donc

$$\boxed{\forall a \in S_{n+1} \quad M(a) = M(\varphi_n(a)) \quad \text{ou} \quad M(a) = M(\varphi_n(a)) + 1}$$

5.(c) On partitionne

$$\begin{aligned} & \{a \in S_{n+1}; M(a) = k + 1\} = \\ & \{a \in S_{n+1}; M(a) = k + 1, M(\varphi_n(a)) = k\} \sqcup \{a \in S_{n+1}; M(a) = k + 1, M(\varphi_n(a)) = k + 1\} \end{aligned}$$

Dans une liste $a \in S_{n+1}$ telle que $b = \varphi_n(a)$ admet $k + 1$ montées, on peut placer l'élément $n + 1$ en fin de chacune des montées de b et seulement là pour préserver le nombre de montées. On a donc $(k + 1)$ choix pour chacune de ces listes. Dans une liste $a \in S_{n+1}$ telle que $b = \varphi_n(a) =$

admet k montées, pour augmenter de une montée, il faut placer $n + 1$ hors des positions qui laissent invariants le nombre de montées. Il y a k positions de fin de montées à éviter d'où $n - k$ positions possibles et il faut aussi compter l'insertion de $n + 1$ en première position ce qui fait donc $n - k + 1$ choix possibles pour chacune de ces listes. Ainsi, passant au cardinal, on conclut

$$\boxed{E_{n+1}(k+1) = (k+1)E_n(k+1) + (n+1-k)E_n(k)}$$

On vérifie sans difficulté que la formule est valide pour $k = 0$ et $k > n$.

6. On procède par récurrence sur n . L'initialisation pour $n = 1$ est vraie. On suppose l'égalité vraie au rang n entier non nul fixé. Soit $k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} E_{n+1}(k+1) &= (k+1)E_n(k+1) + (n+1-k)E_n(k) \\ &= (k+1) \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{n+1}{k+1-j} j^n + (n+1-k) \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{n+1}{k-j} j^n \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \left[(k+1) \binom{n+1}{k+1-j} - (n+1-k) \binom{n+1}{k-j} \right] j^n \end{aligned}$$

On trouve pour $j \in \llbracket 1; k+1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} & (k+1) \binom{n+1}{k+1-j} - (n+1-k) \binom{n+1}{k-j} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k+1-j)!(n+1-k+j)!} [(k+1)(n+1-k+j) - (n+1-k)(k+1-j)] \\ &= \frac{(n+2)!}{(k+1-j)!(n+2-(k+1-j))!} j \end{aligned}$$

et ainsi
$$E_{n+1}(k+1) = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} \binom{n+2}{k+1-j} j^{n+1}$$

ce qui clôt la récurrence. On a donc établi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad E_n(k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{n+1}{k-j} j^n}$$

7. D'après le résultat qui précède, on a pour n entier non nul

$$E_{2n-1}(n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \binom{2n}{n-j} j^{2n-1}$$

Sans difficulté, on observe $(-1)^{n-j} = (-1)^{n+j}$ et $\binom{2n}{n+j} = \binom{2n}{2n-(n+j)} = \binom{2n}{n-j}$ pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ avec le résultat de la question 4.(c), on conclut

$$\boxed{E_{2n-1}(n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt}$$