Devoir surveillé n°1 - 4h - 13/09/25

En dehors de sa dernière question, la partie II est indépendante de la partie I.

Partie I - Intégrales généralisées de Dirichlet

1. Les sous-questions sont indépendantes.

(a) On considère la fonction

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) i. Prouver la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

On admet l'égalité $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

ii. Déterminer, pour j entier non nul, la valeur de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} dt$.

(c) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $t \mapsto \ln(g(t))$.

(d) On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Donner un équivalent de $\int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt$ pour $n \rightarrow +\infty$.

2. Soit n un entier naturel ≥ 2 .

(a) Vérifier que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^n}{t^n} dt$ est convergente.

(b) Quelle est la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2} dt$?

3. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel t , on pose $h_n(t) = \sin(t)^n$.

Soit n entier naturel ≥ 2 .

(a) Soit $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Justifier l'existence d'un réel $K > 0$ pour lequel, pour tout réel t , on a $\left| h_n^{(k)}(t) \right| \leq K$.

(b) i. Quel est le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction h_n ?

ii. Établir
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(c) Justifier, pour tout entier $k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$, la convergence absolue de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt.$$

(d) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt$ et établir l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Pour tout t réel, établir l'égalité

$$h_{2n}(t) = \sin(t)^{2n} = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)t}$$

(b) En déduire pour tout réel t l'égalité

$$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} \sin(2jt)$$

(c) En déduire l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^{2n} dt = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1}$$

5. Étude asymptotique de la suite de terme général $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt$

(a) Prouver $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(b) i. Étudier la monotonie de la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ sur $]0; \frac{\pi}{2}].$

ii. En déduire $\int_{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

On pourra, en utilisant le résultat de la question 1.(c), donner un équivalent de $\ln\left(\frac{\sin(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n}\right)$ où $\varepsilon_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

(c) i. Justifier l'existence de $a > 0$ tel que, pour $u \in [0; a]$, on a $|e^{-u} - 1| \leq 2u$.
ii. Justifier l'existence d'un réel $b > 0$ tel que, pour tout $t \in]0; b]$,

$$-t^3 \leq \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leq 0$$

On utilisera le résultat de la question 1.(c).

iii. En déduire, pour tout entier n assez grand, l'inégalité

$$\left| \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt - \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right| \leq \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} (1 - e^{-nt^3}) dt$$

puis, toujours quand l'entier n est assez grand, l'inégalité

$$\left| \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt - \int_0^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right| \leq 2 \frac{\ln(n)^4}{n}$$

iv. En déduire $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^n dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$

On se souviendra du résultat de 1.(d).

Partie II - Montées d'une permutation de $\llbracket 1; n \rrbracket$

Soit n entier naturel non nul. On appelle *montée* d'une liste $a = (a_1, \dots, a_n)$ d'entiers naturels distincts deux à deux toute sous-liste $(a_p, a_{p+1}, \dots, a_q)$ avec $p \leq q$ vérifiant les conditions

$$\begin{cases} p = 1 \text{ ou } a_{p-1} > a_p \\ \text{et } a_p < a_{p+1} < \dots < a_q \text{ si } p < q \\ \text{et } q = n \text{ ou } a_q > a_{q+1} \end{cases}$$

On note $M(a)$ le nombre de montées de la liste a . Par exemple, les montées de la liste $a = (2, 5, 7, 6, 1, 4, 3, 8)$ sont $(2, 5, 7)$, (6) , $(1, 4)$, $(3, 8)$ et donc $M(a) = 4$.

On définit de même la notion de *descente* d'une liste a d'entiers naturels distincts deux à deux et son nombre de descentes $D(a)$. Par exemple, les descentes de la liste $a = (2, 5, 7, 6, 1, 4, 3, 8)$ sont (2) , (5) , $(7, 6, 1)$, $(4, 3)$ et (8) d'où $D(a) = 5$.

Pour n entier naturel non nul, on note S_n l'ensemble des n -listes d'éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ distincts deux à deux.

Il est clair que pour toute liste a de S_n , on a $1 \leq M(a) \leq n$ et $1 \leq D(a) \leq n$.

Enfin, pour tout entier naturel k , on note $E_n(k)$ le nombre de listes a de S_n ayant exactement k montées. Autrement dit, $E_n(k) = \text{Card} \{a \in S_n; M(a) = k\}$. On a donc $E_n(0) = 0$ ainsi que $E_n(k) = 0$ pour tout entier $k > n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Déterminer les valeurs de $E_n(1)$ et $E_n(n)$.

(b) Soit k un entier fixé compris entre 1 et n .

Donner un exemple de liste a de S_n pour laquelle $M(a) = k$.

2. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul et toute liste a de S_n , la valeur de la quantité $M(a) + D(a)$.

En notant, pour $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, s_i la somme du nombre de montées et du nombre de descentes de $(a_1, \dots, a_i)$, on évaluera en fonction du nombre s_i , la somme s_{i+1} des nombres de montées et de descentes de $(a_1, \dots, a_{i+1})$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À toute liste $a = (a_1, \dots, a_n)$ de S_n , on associe la liste

$$\Psi(a) = (n+1-a_1, n+1-a_2, \dots, n+1-a_n)$$

(a) Vérifier que l'application Ψ est une bijection de S_n sur S_n .

(b) En déduire $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad E_n(k) = E_n(n+1-k)$

4. Calcul de $E_n(2)$

Soit n entier naturel ≥ 2 .

(a) Quel est le nombre de couples (A, B) de parties non vides de $\llbracket 1; n \rrbracket$ tels que

$$A \cup B = \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{et} \quad A \cap B = \emptyset$$

(b) Établir $E_n(2) = 2^n - (n+1)$

5. Une relation de récurrence

Soit n entier naturel non nul. À toute liste $a = (a_1, \dots, a_{n+1})$ de S_{n+1} , on associe la liste $\varphi_n(a)$ de S_n obtenue en ôtant l'élément $(n+1)$ de la liste a . Par exemple, dans le cas particulier où $n = 5$, si $a = (3, 4, 1, 5, 6, 2)$, alors $\varphi_5(a) = (3, 4, 1, 5, 2)$ et si $a = (6, 3, 4, 1, 5, 2)$, alors $\varphi_5(a) = (3, 4, 1, 5, 2)$.

- (a) Soit $b = (a_1, \dots, a_n)$ un élément de S_n . Comment s'écrivent les éléments de S_{n+1} dont l'image par φ_n est égale à b ?
- (b) Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $b \in S_n$ tels que $M(b) = k$. Quelles sont les valeurs possibles de $M(a)$ pour un élément a de S_{n+1} dont par l'image par φ_n est égale à b ?
- (c) Établir pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$E_{n+1}(k+1) = (k+1)E_n(k+1) + (n+1-k)E_n(k)$$

Vérifier que cette formule tient également pour $k = 0$ et pour tout entier $k > n$.

6. *La formule de Worpitzky*

Établir, pour tout n entier naturel non nul et tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, l'égalité

$$E_n(k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{n+1}{k-j} j^n$$

On raisonnera par récurrence sur l'entier n .

7. *Une égalité miraculeuse*

Justifier, pour tout n entier naturel non nul, l'égalité

$$E_{2n-1}(n) = \frac{2}{\pi} (2n-1)! \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^{2n} dt$$