DM 2 de Physique à rendre le vendredi 19/09/25

Mesure de la variation temporelle du champ de pesanteur

Notations et données numériques utiles dans l'épreuve :

- constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}3 \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$
- constante de Planck : $h = 6{,}6 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
- célérité de la lumière : $c = 3{,}0 \times 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
- unité de masse atomique : $u = 1{,}7 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
- constante de gravitation universelle : $G = 6{,}7 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1}}$
- masse de la Terre : $m_{\mathtt{T}} = 6{,}0 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$
- masse de la Lune : $m_{\mathtt{L}} = 7{,}3 \times 10^{22}\ \mathrm{kg}$
- masse du Soleil : $m_{\mathtt{S}} = 2{,}0 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}$
- rayon de la Terre : $R_{\mathtt{T}} = 6{,}4 \times 10^{6}\ \mathrm{m}$
- distance Terre-Soleil : $d_{\mathtt{S}} = 1{,}5 \times 10^{11}\ \mathrm{m}$
- distance Terre-Lune : $d_{\mathtt{L}} = 3{,}8 \times 10^{8}\ \mathrm{m}$

De nombreux domaines technologiques nécessitent de connaitre de manière précise la valeur du champ de pesanteur $\vec{g}$ (tel que le poids $\vec{P}$ d'un corps de masse m s'écrive $\vec{P} = m\vec{g}$). Ce sujet s'intéresse dans sa première partie à un modèle permettant d'expliquer la dépendance temporelle du champ de pesanteur mesurée par un appareil de précision étudié dans sa seconde partie. Dans tout le problème on notera $g = ||\vec{g}||$ l'intensité de la pesanteur.

Un dispositif quantique de précision étudié dans la seconde partie permet d'accéder à de très faibles variations du champ de pesanteur. Dans cette première partie, on s'intéresse tout d'abord au champ de gravitation en un point M de masse m fixé à la surface de la Terre (et donc immobile par rapport à celle-ci. On note $\vec{g} = g\vec{u}$ le champ de pesanteur en M où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de la verticale locale orientée vers le bas. On observe expérimentalement que g dépend faiblement du temps. On introduit alors $\bar{g}$, la moyenne temporelle de g sur une période d'étude et $\delta g = g - \bar{g}$. La courbe de la figure 1 représente les variations de δg en fonction du temps mesurées grâce au dispositif étudié dans la seconde partie. La valeur moyenne de g à l'endroit considéré et sur la période considérée est $\bar{g} = 9\,808\,907\,500\,\mathrm{nm \cdot s^{-2}}$, l'axe des abscisses est gradué en jour julien moyen [1]. La durée d'observation est d'environ 25 jours.
Le but de cette partie est de comprendre l'origine de cette variation temporelle et d'en donner une expression approchée. Pour cela, on s'intéresse aux forces gravitationnelles exercées sur le point M de masse m. On considère ici que chaque astre (Terre, Soleil, Lune, etc.) exerçant une influence gravitationnelle est à symétrie sphérique. Pour un astre ($\mathtt{A}$), on notera A, $R_{\mathtt{A}}$ et $m_{\mathtt{A}}$ respectivement son centre, son rayon et sa masse (en particulier, la Terre ($\mathtt{T}$) sera décrite par une sphère de centre T, de rayon $R_{\mathtt{T}}$ et de masse $m_{\mathtt{T}}$). On note également $d_{\mathtt{A}} = |\overrightarrow{TA}|$ la distance entre les centres A et T de l'astre ($\mathtt{A}$) et de la Terre.

1. Le jour julien est un système de datation consistant à compter le nombre de jours et fraction de jour écoulés depuis une date conventionnelle fixée au 1er janvier de l'an 4713 av. J.-C.

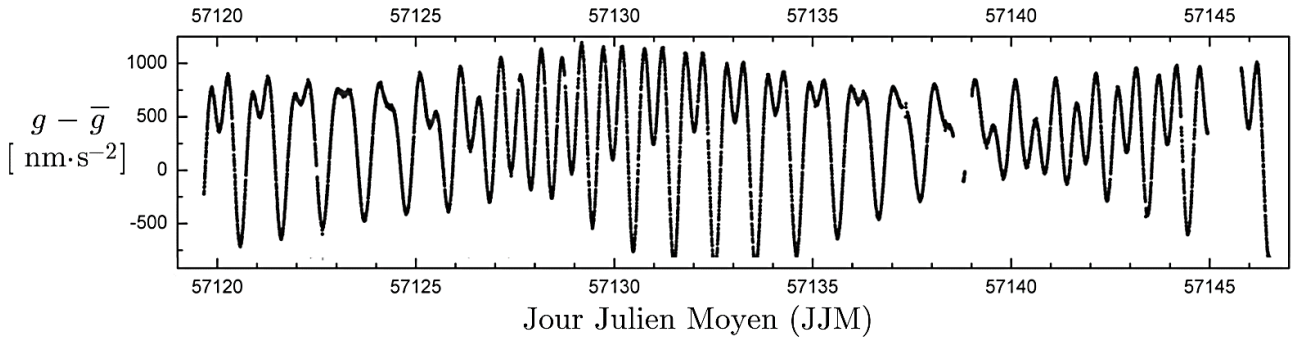

FIGURE 1 – Variation temporelle de l'intensité de la pesanteur

❑ – **1.** Évaluer graphiquement les trois temps caractéristiques $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ qui apparaissent sur la courbe de la figure 1.

Que peut-on conjecturer sur les origines respectives des variations de g sur chacune de ces échelles de temps ?

❑ – **2.** Rappeler la définition d'un référentiel galiléen, du référentiel de Copernic $\mathscr{R}_0$ et du référentiel géocentrique $\mathscr{R}_g$.

❑ – **3.** On considère que le référentiel $\mathscr{R}_0$ est galiléen. Montrer que $\mathscr{R}_g$ ne l'est pas.

La force gravitationnelle $\vec{F}_{\mathtt{A}\to m}$ exercée par un astre (A) sur un corps ponctuel de masse m placé en M et le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}_{\mathtt{A}}(M)$ créé par l'astre (A) en M vérifient la relation $\vec{F}_{\mathtt{A}\to m} = m\vec{\mathcal{G}}_{\mathtt{A}}(M)$.

❑ – **4.**

Donner l'expression du champ $\vec{\mathcal{G}}_{\mathtt{A}}(M)$ crée par un astre (A) pour $AM > R_{\mathtt{A}}$, en fonction de G, $m_{\mathtt{A}}$ et $\overrightarrow{AM}$.

On introduit une base $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ fixe dans $\mathscr{R}_g$ telle que le plan $\mathscr{P}_e = (T,\vec{e}_x,\vec{e}_y)$ coïncide avec le plan équatorial terrestre. On considère que la Terre est en rotation uniforme autour de l'axe $(T,\vec{e}_z)$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}_g$ et on note $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ son vecteur rotation. On considère un point M de masse m situé à la surface de la Terre et un astre quelconque (A). Le vecteur unitaire radial de la base sphérique locale en M est $\widehat{e}_r = \overrightarrow{TM}/R_{\mathtt{T}}$. On note finalement $\Psi_A = (\widehat{\overrightarrow{TM},\overrightarrow{TA}})$ l'angle vu depuis de le centre de la Terre entre le point M et le centre de l'astre (A). Ces notations sont explicitées sur la figure 2 dans laquelle les échelles, notamment de distance, ne sont pas respectées.
Dans le référentiel géocentrique $\mathscr{R}_g$, les trajectoires du point M appartenant à la surface de la Terre, ainsi que celles des centres L et S de la Lune et du Soleil peuvent être considérées comme circulaires uniformes, de périodes respectives T_M, T_L, et T_S.

❑ – **5.** Donner la valeur approximative, en jours terrestres, de chacune de ces périodes.
Déterminer la valeur numérique de ω en radian par seconde.

On suppose que l'influence gravitationnelle d'un astre (A) est non négligeable. Pour un point M de masse m posé à la surface de la Terre, immobile par rapport à la Terre et soumis à des forces de contact de résultante $\vec{R}$, l'intensité de la pesanteur est définie par

$$\vec{R} + m\vec{g} = \vec{0}$$

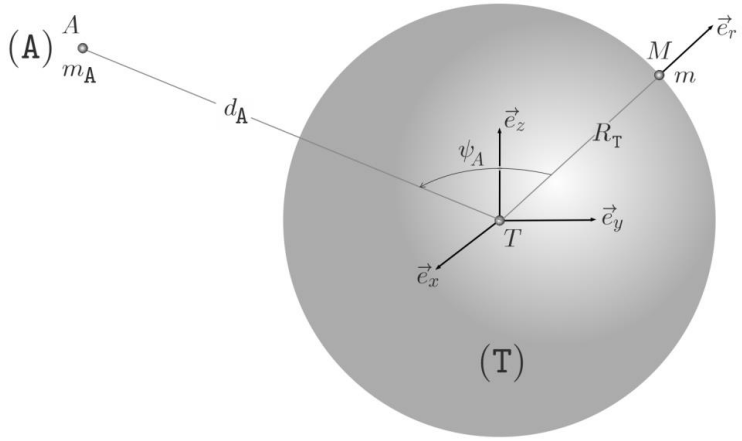

FIGURE 2 – Caractérisation géométrique du problème

❑ – **6.** En étudiant le mouvement de M dans le référentiel $\mathscr{R}_g$, montrer que l'on peut exprimer $\vec{g}$ sous la forme $\vec{g} = \vec{\mathcal{G}}_T(M) + \vec{\gamma}_0 + \vec{\gamma}_1$ où $\vec{\gamma}_0$ s'exprime en fonction de $\vec{\omega}$ et de $\overrightarrow{TM}$ alors que $\vec{\gamma}_1$ est simplement la différence entre $\vec{\mathcal{G}}_A(M)$ et $\vec{\mathcal{G}}_A(T)$.

❑ – **7.** Comment intervient le terme $\vec{\gamma}_0$ dans la variation du champ de pesanteur locale ?

En considérant uniquement l'effet d'un astre (A), on note δg_A l'expression théorique de la quantité δg discutée dans le préambule de cette partie **I.**

❑ – **8.** Déterminer l'expression de δg_A en fonction de $\vec{e}_r$ et de l'un des trois termes $\vec{\mathcal{G}}_T(M)$, $\vec{\gamma}_0$ ou $\vec{\gamma}_1$.

Remarque rajoutée : Dans cette question et dans la suite on assimile $\vec{u}$ à $-\vec{e_r}$.

En pratique, l'astre perturbateur (A) considéré est toujours très loin de la Terre. Ainsi, $d_A \gg R_T$ et l'on peut chercher à donner une expression approchée de $\vec{\gamma}_1$ en se limitant uniquement aux termes d'ordre 1 en R_T/d_A.

❑ – **9.** Montrer que, dans cette approximation, $\vec{\gamma}_1$ s'exprime sous la forme

$$\vec{\gamma}_1 = -\frac{Gm_A}{d_A^3}\left(\overrightarrow{TM} + \mu\overrightarrow{TA}\right)$$

où l'on précisera l'expression de μ en fonction de ~~$\overrightarrow{TM}$, $\overrightarrow{TA}$~~, d_A, R_T et Ψ_A.
En déduire l'expression de δg_A en fonction de G, m_A, d_A, R_T et Ψ_A.

❑ – **10.** Déterminer l'expression de $|\delta g_A|$ dans le cas particulier où $\overrightarrow{TM}$ et $\overrightarrow{TA}$ sont colinéaires et de même sens.
Calculer alors, dans ce cas, les valeurs de $|\delta g_L|$ et $|\delta g_S|$, variations de g dues respectivement à la Lune et au Soleil ainsi que de leur rapport $\kappa = |\delta g_L|/|\delta g_S|$. Commenter les valeurs obtenues.

On se place dans un modèle dans lequel on admet que pour tous les astres (A) autres que le Soleil et la Lune on a $|\delta g_A| \ll |\delta g_S|$.

❑ – **11.** En prenant en compte les résultats des questions précédentes, écrire l'expression la plus simple possible de $|\delta g|$ correspondant au modèle étudié en fonction notamment du temps t.
Après avoir tracé l'allure de la fonction $t \mapsto |\delta g|(t)$ sur un mois, comparer ce résultat aux données expérimentales de la figure 1.