Feuille d'exercices n°09

Exercice 1 (****)

Soit $(a_n)_n$ une suite réelle non nulle. On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ pour n entier. On suppose

$$a_n \mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Montrer
$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$$

Corrigé : La suite $(\mathrm{S}_n)_n$ est croissante positive donc admet une limite $\ell \in \,]\,0\,;+\infty\,[\, \cup \{+\infty\}$. Supposons que cette limite soit finie. On aurait alors $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$ d'où la divergence grossière de la série $\sum a_n^2$ ce qui contredit l'hypothèse sur $(\mathrm{S}_n)_n$. On en déduit que $\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Pour n entier non nul, on a

$$\mathrm{S}_n^3 - \mathrm{S}_{n-1}^3 = (\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1})(\mathrm{S}_n^2 + \mathrm{S}_n\mathrm{S}_{n-1} + \mathrm{S}_{n-1}^2) = a_n^2(\mathrm{S}_n^2 + \mathrm{S}_n\mathrm{S}_{n-1} + \mathrm{S}_{n-1}^2)$$

On remarque
$$a_n\mathrm{S}_{n-1} = a_n(\mathrm{S}_n - a_n^2) = a_n\mathrm{S}_n + a_n^3 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Il s'ensuit
$$\mathrm{S}_n^3 - \mathrm{S}_{n-1}^3 \xrightarrow[n\to\infty]{} 3$$

et d'après le lemme de Césaro

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\mathrm{S}_k^3 - \mathrm{S}_{k-1}^3\right] = \frac{\mathrm{S}_n^3}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3$$

On conclut
$$\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}}$$

Remarque : Comment peut-on avoir l'idée de considérer $\mathrm{S}_n^3 - \mathrm{S}_{n-1}^3$ pour n entier non nul ? Comme $a_n\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, chercher un équivalent de a_n pour $n \to +\infty$ équivaut à chercher un équivalent de S_n pour $n \to +\infty$. On va donc chercher à isoler a_n ou S_n mais d'après la définition de S_n, il semble plus réaliste d'envisager d'isoler S_n. On remarque

$$a_n^2\mathrm{S}_n^2 = (\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1})\mathrm{S}_n^2 = \mathrm{S}_n^3 - \mathrm{S}_{n-1}\mathrm{S}_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Cette dernière expression est « proche » d'une forme téléscopique ce qui amène naturellement à considérer $\mathrm{S}_n^3 - \mathrm{S}_{n-1}^3$ qui permet d'isoler S_n^3 après télescopage et permet aussi d'espérer un comportement adapté au lemme de Césaro et c'est exactement ce qui a lieu.

Exercice 2 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;+\infty\,[\,,]\,0\,;+\infty\,[)$ telle que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

Montrer que la série $\sum f(n)$ converge et donner un équivalent du reste d'ordre n lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé : Il existe $a \geqslant 0$ tel que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \leqslant -1$ pour $x \geqslant a$. Ainsi, pour $x \geqslant a$, on a

$$\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{f(x)}{f(a)}\right) \leqslant -(x-a)$$

d'où $$\forall n \geqslant a \qquad 0 \leqslant f(n) \leqslant f(a)\mathrm{e}^{-n+a} = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-n})$$

et par comparaison à une série géométrique convergente, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum f(n) \text{ converge.}}$$

Soit $c > 0$. Il existe $\mathrm{A} \geqslant 0$ tel que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \leqslant -c$ pour $x \geqslant \mathrm{A}$. Ainsi, avec $\mathrm{N} = \lfloor \mathrm{A} \rfloor$, il vient

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \forall k \geqslant 0 \qquad \int_{n+1}^{n+k+1} \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{f(n+k+1)}{f(n+1)}\right) \leqslant -ck$$

ce qui équivaut à $$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad f(n+k+1) \leqslant f(n+1)\mathrm{e}^{-ck}$$

Par suite $$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \mathrm{R}_{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} f(n+k+1) \leqslant f(n+1)\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ck} = f(n+1)\frac{\mathrm{e}^{-c}}{1-\mathrm{e}^{-c}}$$

Comme $\mathrm{e}^{-c} \xrightarrow[c\to+\infty]{} 0$, il s'ensuit

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant \mathrm{N} \implies 0 \leqslant \mathrm{R}_{n+1} \leqslant \varepsilon f(n+1)$$

ce qui signifie $$\mathrm{R}_{n+1} = \mathrm{o}(f(n+1)$$

Or, on a $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{R}_n = f(n+1) + \mathrm{R}_{n+1}$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} f(n)}$$

Exercice 3 (****)

Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

Corrigé : L'idée est de considérer des suites extraites de sorte que les valeurs de $\sin\sqrt{n}$ soient concentrées au dessus de $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \alpha_n = \left\lfloor \left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)^2 \right\rfloor \quad \text{et} \quad \beta_n = \left\lfloor \left(2n\pi + \frac{3\pi}{4}\right)^2 \right\rfloor$$

Ainsi, pour n entier, on a en particulier

$$\sqrt{\alpha_n + 1} > 2n\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \sqrt{\beta_n} \leqslant 2n\pi + \frac{3\pi}{4}$$

et $$\beta_n - \alpha_n \geqslant \left(2n\pi + \frac{3\pi}{4}\right)^2 - 1 - \left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)^2 \geqslant 2n\pi^2 + \mathrm{o}(n)$$

Par suite, on obtient pour n entier

$$\sum_{k=\alpha_n+1}^{\beta_n} \frac{\sin(\sqrt{k})}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=\alpha_n+1}^{\beta_n} \frac{1}{\sqrt{\beta_n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{2n\pi^2 + \mathrm{o}(n)}{2n\pi + \mathrm{o}(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Notant $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(\sqrt{k})}{\sqrt{k}}$, si la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ convergeait, on aurait $\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{S}$ avec S réel et par conséquent

$$\sum_{k=\alpha_n+1}^{\beta_n} \frac{\sin(\sqrt{k})}{\sqrt{k}} = \mathrm{S}_{\beta_n} - \mathrm{S}_{\alpha_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ce qui n'a pas lieu. On conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \text{ diverge.}}$$

Remarque : La fonction $\sqrt{}$ croît lentement. Ainsi, on peut trouver suffisamment de points répartis entre $2n\pi + \dfrac{\pi}{4}$ et $2n\pi + \dfrac{3\pi}{4}$, c'est-à-dire suffisamment de points dont le sinus est « grand » pour que leur somme contredise la convergence.

Exercice 4 (***)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n}}$.

Corrigé : Posons $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}}{\sqrt{k}}$ pour n entier. Pour p entier non nul, on pose $\mathrm{U}_p = \mathrm{S}_{p^2-1}$. On a

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{U}_{p+1} - \mathrm{U}_p = \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}}{\sqrt{k}} = \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{(-1)^p}{\sqrt{k}} = (-1)^p \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Par monotonie, on trouve

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{(p+1)^2}} = \frac{2p+1}{p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 2$$

Ainsi, la série téléscopique $\sum_{p\geqslant 1} [\mathrm{U}_{p+1} - \mathrm{U}_p]$ diverge grossièrement d'où la divergence de la suite $(\mathrm{U}_p)_{p\geqslant 1}$ c'est-à-dire de la suite $(\mathrm{S}_{p^2-1})_{p\geqslant 1}$ extraite de la suite des sommes partielles. On conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n}} \text{ diverge.}}$$

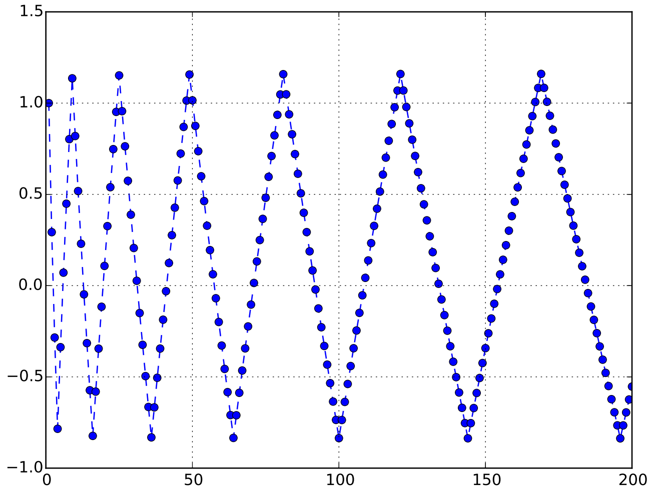

FIGURE 1 – Tracé de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$

Remarque : Soit p entier non nul. On a

$$v_p = |\mathrm{U}_{p+1} - \mathrm{U}_p| = \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Par comparaison série/intégrale, on trouve

$$\int_{p^2}^{(p+1)^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant v_p \leqslant \int_{p^2-1}^{(p+1)^2-1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

d'où $$2 \leqslant v_p \leqslant 2\left(\sqrt{p^2+2p} - \sqrt{p^2-1}\right) = 2p\left(\sqrt{1+\frac{2}{p}} - \sqrt{1-\frac{1}{p^2}}\right)$$

Avec le développement usuel $\sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + \mathrm{O}(u^3)$, on obtient

$$\sqrt{1+\frac{2}{p}} - \sqrt{1-\frac{1}{p^2}} \underset{p\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} - \left(1 - \frac{1}{2p^2}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{p^3}\right) = \frac{1}{p} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{p^3}\right)$$

Et par conséquent $$v_p \underset{p\to+\infty}{=} 2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

Il s'ensuit $$\sum_{p=1}^{n} [\mathrm{U}_{p+1} - \mathrm{U}_p] = \sum_{p=1}^{n} (-1)^p v_p = 2\sum_{p=1}^{n} (-1)^p + \sum_{p=1}^{n} \mathrm{O}\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

Ceci prouve que la suite $(\mathrm{U}_p)_{p\geqslant 1}$ est bornée. Enfin, les ensembles $(\llbracket p^2\,;\,(p+1)^2-1\rrbracket)_{p\geqslant 1}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$. Pour n entier non nul, il existe un unique p entier non nul tel que $n \in \llbracket p^2\,;\,(p+1)^2-1\rrbracket$. Ainsi

$$\mathrm{S}_n = \mathrm{U}_p + (-1)^p \sum_{k=p^2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Cette écriture prouve la monotonie de S_n pour $n \in \llbracket p^2\,;\,(p+1)^2-1\rrbracket$ et donc S_n prend des valeurs entre U_p et U_{p+1}. On en déduit que la suite des sommes partielles $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

Exercice 5 (****)

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs convergente. Établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leqslant \mathrm{e} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Corrigé : On rappelle l'inégalité arithmético-géométrique

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}_+^n \qquad \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

qui s'obtient, par exemple, avec l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction concave ln. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad b_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} = n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

On a
$$\prod_{k=1}^{n} b_k = (n+1)^n$$

et à nouveau par concavité de ln $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad b_n \leqslant n\mathrm{e}$

En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique à $(a_k b_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (n+1) \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k b_k} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

D'où pour N entier non nul

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{n(n+1)} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n \leqslant \mathrm{N}} \frac{a_k b_k}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_k b_k \sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n(n+1)}$$

On remarque
$$\sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = \frac{1}{k} - \frac{1}{\mathrm{N}+1} \leqslant \frac{1}{k}$$

d'où
$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leqslant \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{a_k b_k}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{e}\, a_k$$

Faisant tendre $\mathrm{N} \to +\infty$, on conclut

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leqslant \mathrm{e} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n}$$

Remarque : Il s'agit de l'inégalité de *Carleman*.

Exercice 6 (***)

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n) \\ u_0 > 0 \end{cases}$.

Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ puis déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Corrigé : On a $u_n > 0$ pour tout n entier par récurrence immédiate. La fonction Arctan est croissante et une étude de fonction permet d'établir $\operatorname{Arctan}(x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$ d'où la décroissance de la suite $(u_n)_n$. D'après le théorème de limite monotone, il s'ensuit que la suite $(u_n)_n$ converge vers une limite $\ell \geqslant 0$. La fonction Arctan étant continue sur $[\,0\,; +\infty\,[$, la limite ℓ est point fixe de Arctan et une étude permet d'établir pour $x \geqslant 0$

$$\mathrm{Arctan}\,(x) = x \iff x = 0$$

D'où $$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Déterminons α réel tel que $\left(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha\right)_n$ admette une limite finie non nulle. Soit n entier. Avec le développement usuel $\mathrm{Arctan}\,(u) = u - \dfrac{u^3}{3} + \mathrm{o}(u^3)$, il vient

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha &= (\mathrm{Arctan}\,(u_n))^\alpha - u_n^\alpha = \left(u_n - \frac{u_n^3}{3} + \mathrm{o}(u_n^3)\right)^\alpha - u_n^\alpha \\
&= u_n^\alpha \left[\left(1 - \frac{u_n^2}{3} + \mathrm{o}(u_n^2)\right)^\alpha - 1\right] \\
&= u_n^\alpha \left(1 - \frac{\alpha u_n^2}{3} + \mathrm{o}(u_n^2) - 1\right) = u_n^{\alpha+2}\left(-\frac{\alpha}{3} + \mathrm{o}(1)\right)
\end{aligned}$$

On choisit $\alpha = -2$ et on obtient $$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}$$

D'après le théorème de Césaro, il vient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}$$

d'où $\dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_0^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2n}{3}$ et avec $\dfrac{1}{u_0^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{u_n^2}\right)$, on trouve

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{2n}}$$

D'après le critère des équivalents pour des séries à termes positifs, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ diverge.}}$$

Variante : On peut aussi envisager l'étude de la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Pour n entier, on a

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{\mathrm{Arctan}\,(u_n)}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{u_n^2}{3} + \mathrm{o}(u_n^2)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{3} < 0$$

D'après le critère des équivalents licite pour des séries à termes négatifs, les séries $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature. D'après le lien suite/série téléscopique, comme $\ln u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$, la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge et par conséquent la série $\sum u_n^2$ diverge. Enfin, comme $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on dispose d'un seuil N entier tel que $u_n \leqslant 1$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$ et il vient

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad 0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n$$

Par comparaison, on retrouve la divergence de $\sum u_n$. Cette technique répond à la question sans fournir d'équivalent du terme général.

Exercice 7 (***)

Pour n entier non nul, on note $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on pose

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \varphi(p) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{H}_n \geqslant p\}$$

1. Justifier que φ est bien définie.
2. Déterminer un développement asymptotique de H_n à deux termes pour $n \to +\infty$.
3. En déduire un équivalent simple de $\varphi(p)$ pour $p \to +\infty$ et le comportement asymptotique de la suite $\left(\dfrac{\varphi(p+1)}{\varphi(p)}\right)_{p\geqslant 1}$.

Corrigé : 1. Soit p entier non nul. On a $\mathrm{H}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et par suite, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{H}_n \geqslant p\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ donc admet un plus petit élément ce qui prouve que

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est bien définie.}}$$

2. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue, décroissante, positive sur $[1\,;+\infty[$. D'après le théorème de comparaison série/intégrale, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\left(\displaystyle\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{1}{n}\right)$ converge et par conséquent, il existe une constante réelle γ telle que

$$\boxed{\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)}$$

Remarque : Il s'agit bien sûr de la célèbre constante γ d'Euler.

3. Toujours par comparaison série/intégrale, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{H}_n = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 + \ln n$$

Par définition de φ, on a $\quad \forall p \in \mathbb{N}^* \qquad p \leqslant \mathrm{H}_{\varphi(p)} \quad$ et $\quad \mathrm{H}_{\varphi(p)-1} < p$

On en déduit en particulier

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad p \leqslant \mathrm{H}_{\varphi}(p) \leqslant 1 + \ln\varphi(p)$$

ce qui justifie

$$\varphi(p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$$

Avec le développement asymptotique de $(\mathrm{H}_n)_{n\geqslant 1}$, on obtient

$$p \leqslant \ln\varphi(p) + \gamma + \mathrm{o}(1) \quad \text{et} \quad \ln(\varphi(p) - 1) + \gamma + \mathrm{o}(1) < p$$

d'où

$$\mathrm{e}^{p-\gamma+\mathrm{o}(1)} \leqslant \varphi(p) < 1 + \mathrm{e}^{p-\gamma+\mathrm{o}(1)}$$

On conclut

$$\boxed{\varphi(p) \underset{p\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{p-\gamma} \quad \text{et} \quad \frac{\varphi(p+1)}{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{e}}$$